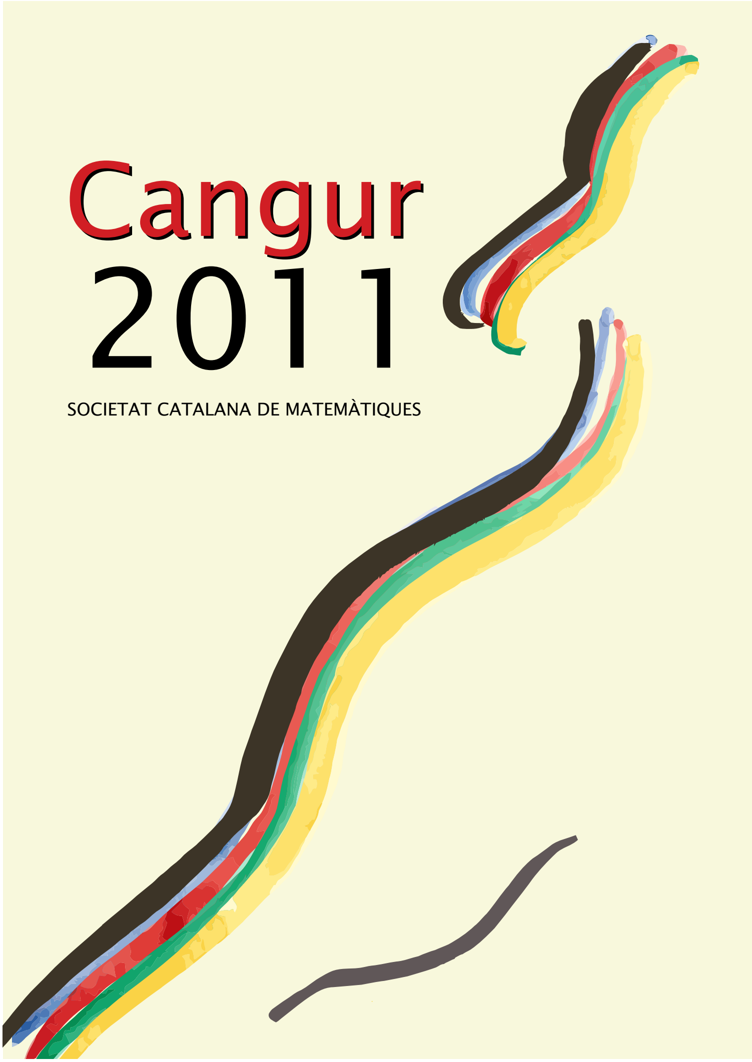


Cangur 2011
i altres activitats de la SCM

Cangur 2011
i altres activitats de la SCM

En aquesta publicació es presenten els enunciats, les relacions de participants més destacats i les solucions comentades de les activitats de resolució de problemes que la SCM ha convocat durant el curs 2010-2011: l'activitat telemàtica prèvia a l'Olimpíada i la nova proposta telemàtica **Marató de problemes**, la **XLVII Olimpíada Matemàtica** (fase catalana), els **Problemes a l'esprint** (per a Primària i Secundària) i el **Cangur 2011**.

Cangur 2011 i altres activitats de la SCM
Publicació de la Societat Catalana de Matemàtiques,
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
http://scm.iec.cat *http://www.cangur.org*

Imprès a Service Point FMI, SA
Dipòsit Legal: B. 21013-2011

Índex

Cangur 2011

Marató de problemes 2011

Presentació

La Societat Catalana de Matemàtiques continua la seva tasca d'estímul de l'interès per les matemàtiques a través d'activitats de resolució de problemes, cosa que trobareu ben palesa en aquesta publicació.

El títol de la publicació comença amb **Cangur 2011** perquè la prova Cangur de la SCM és una activitat capdavantera que enguany ha aplegat a un nombre molt gran de nois i de noies, d'al·lots i d'al·lotes, de xiques i de xics, pràcticament 27.000 arreu dels Països Catalans. És molt important reconèixer el suport i col·laboració de les Universitats de Barcelona, Autònoma de Barcelona, Politècnica de Catalunya, Pompeu Fabra, de Vic, de Lleida, de Girona, Rovira i Virgili, Ramon Llull, Internacional de Catalunya, Jaume I, de València, Politècnica de València, d'Alacant i de les illes Balears i també la tasca de la Societat Balear de Matemàtiques Xeix i de la SEMCV Al-Kkwärizmi.

Tot i que la idea del Cangur rau en l'organització d'una activitat científica de masses, el mateix dia en molts països del món, això no és possible arreu. Per exemple a casa nostra: raons diverses, de caràcter organitzatiu i de la data de celebració de la prova han aconsellat desdoblar-ne la convocatòria en dos dies diferents. Ara bé, ben segur que, en esperit, sí que tots hi participem alhora!

La comissió catalano-valenciano-balear que prepara el Cangur n'adapta els enunciats per a les dues convocatòries. Alguns enunciats són els mateixos, d'altres se'n fan variacions i, finalment, n'hi ha una bona part que són diferents per a una convocatòria i l'altra, a partir d'una acurada tasca de selecció que completa la que va fer en la trobada internacional a Tblisi (Geòrgia). Tot i que hi ha problemes repetits, a fi i efecte de facilitar una lectura clara de la globalitat de les solucions, l'equip de redacció ha optat per publicar completament i de manera seguida les solucions de tots els problemes de cada convocatòria. Aquesta publicació, com tota l'organització del Cangur, és una mostra de la col·laboració amb la millor de les disposicions; un exemple no massa abundant en els nostres temps, però sí habitual en l'entorn del Cangur. Gràcies a tothom que ha treballat perquè tingueu a les mans aquest llibre!

En el títol de la publicació també podeu llegir **...i altres activitats de la SCM** perquè també hi trobareu els enunciats, les solucions i les relacions de participants més destacats d'altres activitats.

La més clàssica d'aquestes activitats és l'**Olimpíada Matemàtica** que ha arribat a la seva quaranta-setena edició. Ja fa més de trenta anys que la SCM n'organitza la fase catalana i ara ja en fa quatre que s'organitza una activitat telemàtica prèvia que enguany ha renovat el plantejament i s'ha allargat durant un mes, fins i tot amb un grup al Facebook.

A redós del Cangur va nèixer l'any 2000, l'*Any Mundial de les Matemàtiques*, una activitat en línia per a equips de centre, aprofitant els recursos de la telemàtica. Aquesta activitat es va anar consolidant i, actualment es convoca conjuntament per part de la Feemcat, el Creamat del Departament d'Ensenyament i la SCM; són els **Problemes a l'esprint** que en les seves quatre convocatòries del 2011 han reunit 217 equips de centre, des del cicle superior de primària al batxillerat, i un total de 4200 alumnes. Aquestes tres entitats han convocat també, com a novetat del 2011, una **Marató de problemes** seguint la mateixa estructura que la fase prèvia de l'Olimpíada però adreçada a alumnes de 3r i 4t d'ESO que, al llarg d'unes quantes setmanes han anat enviant per via telemàtica les respostes als problemes que es proposaven i les explicacions detallades d'alguns d'aquests problemes.

De tot això en teniu detallada crònica en aquesta publicació, on les activitats s'han ordenat cronològicament. La Societat Catalana de Matemàtiques agraeix, amb molt entusiasme, l'esforç i la dedicació dels que fan i han fet possible l'èxit d'aquestes activitats.

L'equip de redacció

XLVII Olimpíada Matemàtica

Activitat telemàtica prèvia a Catalunya
Octubre i novembre de 2010. Enunciats

0. (Problema de 2 punts.)
La mitjana d'un conjunt de sis nombres enters positius diferents es 2010. Si del conjunt en llevem el nombre més petit, la mitjana passa a ser 2011. Si dels cinc nombres restants en tornem a llevar el més petit, la mitjana passa a ser 2012. Si des quatre nombres restants en llevem el més petit, la mitjana passa a ser 2013. Quin és el màxim valor que pot tenir el nombre més gran del conjunt inicial?

1. (Problema de 2 punts.)
La figura mostra un triangle ABC en el qual el costat AB s'ha dividit en n parts. M i N són el primer i el darrer punt dels que defineixen la divisió és a dir que la longitud de AM i la longitud de NB són iguals a la n-sima part de la longitud de AB. Els punts P i R són, respectivament, els punts mitjans dels costats BC i CA. Quina fracció de l'àrea del triangle ABC representa l'àrea del quadrilàter $MNPR$?

prob1.eps80

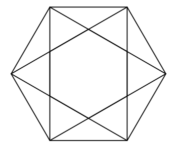
2. (Problema de 3 punts.)
El número 4392 té la propietat que és divisible per cadascuna de les seves xifres, que són totes diferents.
Ara et demanem que busquis un nombre de **set xifres diferents** que sigui divisible per cadascuna de les seves xifres.

3. (Problema de 2 punts.)
Ja saps molt bé que per multiplicar dues potències no es fa pas multiplicant les bases i sumant els exponents però... alguna vegada pot ser veritat?
Calcula els valors de x que són solució de l'equació

$$3^{ax+b} \cdot 9^{cx+b} = 27^{(a+c)x+2b}$$

4. (Problema de 3 + 2 punts.)
De quantes maneres es pot obtenir 2010 com a suma de nombres enters consecutius?

5. (Problema de 2 punts.)
L'àrea de l'hexàgon regular gran de la figura és de A unitats d'àrea.
Quina és l'àrea de l'hexàgon regular que queda determinat al seu interior quan tracem les sis diagonals que es mostren a la figura?



6. (Problema de 4 + 3 punts.)
Trobeu tots els nombres naturals que són quadrats perfectes, que escrits en base 10, tenen sis xifres, cap d'elles igual a 0 i que compleixen la propietat que, si restem 1 a cada xifra, el nombre que en resulta (de sis o menys xifres) també és un quadrat perfecte.

7. (Problema de 3 + 2 punts.)
Calcula, raonadament, quines són les quatre darreres xifres de 11^{2011}.

8. (Problema de 4 punts.)
En una circumferència C_1 dibuixem dos radis que formen un angle de 60°. A l'interior del sector circular que així s'ha construït dibuixem una circumferència C_2 tangent als dos radis i a la circumferència inicial. Si l'àrea del cercle determinat per la circumferència C_1 és A, quina és l'àrea del cercle determinat per C_2?

9. (Problema de 4 punts.)
Per quines ternes de nombres reals (a, b, c) el polinomi $x^3 - ax^2 + bx - c$ té arrels a, b, c (iguals o diferents)?

10. (Problema de 7 punts.)
Raoneu quants triangles podem dibuixar que tinguin els tres vèrtexs en els vèrtexs d'un polígon regular de $2n+1$ costats amb la propietat que el centre del polígon regular sigui interior al triangle.

XLVII Olimpíada Matemàtica

Activitat telemàtica prèvia. Els resultats

Aquesta activitat es va desenvolupar des del dia 20 d'octubre de 2010 fins el dia 18 de novembre de 2010. Es van inscriure 146 participants, dels quals més de 70 van enviar les respostes a 4 problemes o més dels 11 que es van proposar, que atorgaven un màxim de 43 punts.

Els **premis** corresponen a

- ex-aequo amb 43 punts,
  Eudald Romo i Grau, 1r BTX, Institut Jaume Vicens Vives, de Girona
  i Eduardo Atao Salazar, 1r BTX, Col·legi Sagrat Cor de Jesús, de Terrassa
- Jordi Vila Pérez, 2n BTX, Institut A. Deulofeu de Figueres, amb 41,5 punts.

Es fa una **menció especial** de

- Eduard Vázquez Espín, 2n BTX, Institut de Pallejà (41 punts)
  i Júlia Alsina Oriol, 1r BTX, Institut Jaume Callís de Vic (40,6 punts).

Relació d'alumnes que van superar la puntuació de 30 punts:

Quim Monserrat, 2n BTX, Terraferma (Alpicat), 38,6
Darío Nieuwenhuis Nivela, 4t ESO, Aula Escola Europea (Barcelona)
i Marc Felipe i Alsina, 4t ESO, Bell-lloc del Pla (Girona), 37,2
Sabina Sofia Higa Flores, CFS, Institut Salvador Seguí (Barcelona), 36,3
Cristian Reyes Rodríguez, 2n BTX, Institut Pere Fontdevila (Gironella), 35,3
Marc Ballbé Ferrero, 1r BTX, Aula Escola Europea (Barcelona), 34,9
Albert Mateu Sorribas, 4t ESO, Institut Pere Calders (Cerdanyola del V.), 34
Eric Milesi Vidal, 1r BTX, Col.legi Pare Manyanet (Barcelona), 33,4
Jordi Barceló Mercader, 1r BTX, Jesús Maria-Sant Andreu (Barcelona), 33,2
Martí Fernández-Real Girona, 4rt ESO, Institut J. Vicens Vives (Girona), 33
Júlia Bozzino, 4t ESO, Institut Jaume Vicens Vives (Girona), 31,9
Jie Luan, 2n BTX, Institut Montsacopa (Olot), 30,4

XLVII Olimpíada Matemàtica

Activitat telemàtica prèvia. Solucions

Alguns problemes es van plantejar amb diferents valors numèrics en funció de la contrasenya.
En aquesta publicació se'n presenta una versió general.

0. Resposta: 2018.

Si la mitjana d'un conjunt de sis nombres és 2010, aquests sis nombres sumen $6 \cdot 2010 = 12060$. Semblantment cinc nombres de mitjana 2011 sumen $5 \cdot 2011 = 10055$. Per tant el primer nombre que hem llevat, que és el més petit del conjunt és 2005. Quatre nombres de mitjana 2012 sumen $4 \cdot 2012 = 8048$ i d'aquí es dedueix que el segon nombre suprimit és 2007. Els tres darrers nombres, de mitjana 2013, sumen 6039 i concloem que el tercer nombre que hem tret del conjunt és 2009. Per l'enunciat i les càlculs fins aquí sabem que els tres nombres que falta conèixer han de ser tres nombres diferents i més grans que 2009. Com que els dos més petits que compleixen això són 2010 i 2011, el més gran possible serà $603920102011 = 2018$.

1. Resposta: $\dfrac{3n-4}{4n}$.

Designem com b la longitud de la base del triangle, que està dividida en n parts; h en serà l'altura. La figura ombrejada és un trapezi. La base major és $b(n-2)/n$. La base menor, com que és la paral·lela mitjana del triangle mesura $\dfrac{b}{2}$. Per semblança de triangles es dedueix que l'altura del trapezi és $\dfrac{h}{2}$. Si fem l'àrea del trapezi (semisuma de les bases multiplicat per l'altura) i dividim el resultat per l'àrea del triangle, és a dir per $\dfrac{bh}{2}$, el resultat és $\dfrac{3n-4}{4n}$.

2. Resposta: 532.

El 0 no pot formar part del nombre demanat perquè cap nombre natural de 7 xifres no és múltiple de 0.

Aleshores si volem que el nostre nombre sigui múltiple de 5, hauria d'acabar en 5, però això comporta que no seria múltiple de 2, ni de 4 ni de 8 i no podria ser un nombre de 7 xifres que complís les condicions de l'enunciat. Per tant no hi va el 5.

Les vuit xifres candidates que tenim fins ara a formar part del nombre de 7 xifres, $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ sumen 40. Si el nombre no fos múltiple de 3 tampoc no ho seria ni de 6 ni de 9 i no aconseguiríem l'objectiu. Perquè sigui multiple de 3 podríem a priori llevar l'1 o el 4 o el 7. Però si llevem l'1 o el 7 el nombre no seria múltiple de 9 i no aconseguim un nombre de 7 xifres talment com el demana l'enunciat. Si llevem el 4 sí que el nombre resultant serà múltiple de 9, i de 6 i de 3.

Per tant ens hem de quedar amb les xifres $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$. Queda per veure que podem trobar algun nombre amb aquestes set xifres que compleixi l'enunciat. Hem de començar per escriure les tres darreres xifres que formin un múltiple de 8 (hi ha 28 possibilitats) i ordenar les altres perquè el nombre resultant sigui múltiple de 7. El nombre més petit que compleix l'enunciat és 1289736; el més gran és 9867312.

Es va plantejar com a problema suplementari al Fòrum de l'activitat el de trobar quants nombres complien l'enunciat, però no es va rebre resposta. Hi ha 105 nombres que compleixen l'enunciat.

---

3. Resposta: $x = -\dfrac{3b}{2a+c}$.

Només cal aplicar les propietats de les potències.

Com que $9 = 3^2$ i $27 = 3^3$, serà $3^{ax+b} \cdot 3^{2cx+2b} = 3^{3(a+c)x+6b}$ resulta $3^{ax+b+2cx+2b} = 3^{3(a+c)x+6b}$. Trobem de seguida una equació de primer grau $ax + b + 2cx + 2b = 3(a + c)x + 6b$ que resolem sense cap dificultat: $x = -\dfrac{3b}{2a+c}$.

4. Resposta: 15.

Com a idea prèvia per a la solució observarem que si tenim una suma de nombres enters consecutius que ens dóna 2010, si té un nombre imparell de sumands en podem deduir una altra amb un nombre parell de sumands, i recíprocament.

Efectivament: si la suma és $a+\cdots+b = 2010$, amb tots els sumands positius, si hi afegim els sumands $-(a-1)+\cdots+(-1)+0+1+\cdots+(a-1)$ (hi ha un nombre imparell de sumands) també la suma $-(a-1)+\cdots+(-1)+0+1+\cdots+(a-1)+a+\cdots+b = 2010$. Si partim d'una suma amb alguns sumands negatius i altres positius, ara traurem sumands per obtenir una altra suma que interessi amb tots els sumands positius.

Així doncs, ens basta trobar quantes sumes hi ha amb un nombre imparell de sumands. En aquest cas podem escriure la suma que busquem com $(a-k)+(a-k+1)+\cdots+a+\cdots+(a+k-1)+(a+k) = a\cdot(2k+1)$. El nombre de sumands haurà de ser, doncs, un divisor imparell de 2010 (que són 1, 3, 5, 15, 67, 201, 335, 1005).

Això donaria "una suma" d'un sol sumand 2010 (que no compta com a suma) de la qual per l'observació prèvia en deduim una altra amb 4020 sumands (a saber, $(-2009)+\cdots+0+\cdots+2010$).

Una altra suma de 3 sumands, centrada en $\frac{2010}{3} = 670$, és a dir $669+670+671$, a partir de la qual en deduim una altra amb 1340 sumands.

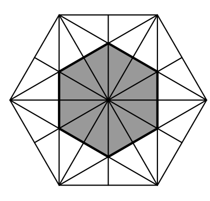
Semblantment amb altres sumes de 5, 15, 67, 201, 335 o 1005 sumands.

Diguem com a exemple que aquesta última està centrada en $\frac{2010}{1005} = 2$. És doncs $(-500)+\cdots+0+1+2+\cdots+504 = 2010$, a partir de la qual deduim una altra suma amb 4 sumands: $501+502+503+504 = 2010$.

Veiem, doncs, que en total hi ha 15 sumes de sumands enters consecutius que donen 2010.

5. Resposta: $\dfrac{A}{3}$.

Si tracem tota la resta de diagonals i els segments que uneixen els punts mitjans de costats oposats, l'hexàgon gran queda descompost en 36 triangles rectangles iguals, 12 dels quals componen l'hexàgon regular central. Per tant l'àrea d'aquest hexàgon és un terç de l'àrea de l'hexàgon gran.



(*En aquest cas hem donat una solució que es va publicar al Fòrum de l'activitat com a idea per al debat.*)

6. Resposta: 118336, 126736.

Busquem dos nombres $M = m^2$ i $N = n^2$ que compleixin $M - N = 111111$, amb m, n enters positius. Serà $m^2 - n^2 = (m + n) \cdot (m - n) = 111111$.
Com que $(m + n)$ i $(m - n)$ són divisors de 111111 podríem anar estudiant, per parelles, tots els divisors "complementaris" de 111111, buscar els valors de m, n, els corresponents valors de M, N i veure si compleixen que M és un nombre de sis xifres amb cap xifra igual a 0.
Tanmateix és interessant estudiar alguna condició suplementària que es pot imposar a m, n per estalviar-nos càlculs. Si fem $m + n = A$ i $m - n = B$, A i B són divisors de 111111 que compleixen $A \cdot B = 111111$.
Tenim que $m = \dfrac{A+B}{2}$, $n = \dfrac{A-B}{2}$ i $A > B$. Com que $100000 \leq m^2 = \left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2 < 1000000$, ha de ser $316 < m = \dfrac{A+B}{2} < 1000$, o sigui, $632 < 2m = A + B < 2000$. Això restringeix els assajos a parelles de divisors complementaris que, en sumar-los, la suma estigui entre 632 i 2000. D'aquestes parelles n'hi ha "només" set i, a cinc d'elles hi apareixen zeros quan calculem M, N. Sigui com sigui trobarem que les úniques possibilitats vàlides són $m = 429$, $n = 259$, $M = 118336$ i $m = 481$, $n = 231$, $M = 126736$.

---

7. Resposta: 0611.

Tenim que $11^{2011} = (10 + 1)^{2011}$. Si ara apliquem el binomi de Newton tots els termes que tinguin 10^i amb $i \geq 4$ acaben amb 0000 i, per tant no influeixen en el càlcul de les quatre darreres xifres, que seran, doncs, les mateixes que les de

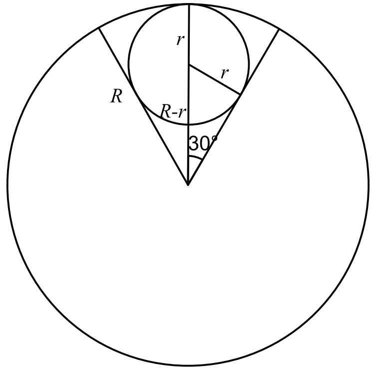
$$\binom{2011}{3}10^3 \cdot 1^{2008} + \binom{2011}{2}10^2 \cdot 1^{2009} + \binom{2011}{1}10 \cdot 1^{2010} + 1^{2011}.$$

Si fem aquest càlcul veurem que resulta un nombre que acaba en 0611.

8. Resposta: $\dfrac{A}{9}$.

Si observeu la figura veureu que es forma un triangle rectangle amb un angle de 30° que té un catet igual al radi r de la circumferència C_2 i la hipotenusa n'és $R-r$, on R és el radi de la circumferència C_1.

Per tant $\sin 30° = \dfrac{r}{R-r} = \dfrac{1}{2}$, d'on es dedueix sense dificultat que $r = \dfrac{R}{3}$ i, per tant, l'àrea del cercle determinat per C_2 és la novena part de l'àrea del cercle determinat per C_1.



9. Resposta: $(a, 0, 0)$ **per qualsevol valor de** a **i** $(1, 1, -1)$**.**.

Ha de ser $x^3 - ax^2 + bx - c = (x-a)(x-b)(x-c)$.

Si operem i identifiquem, coeficients o, alternativament, apliquem les fórmules de Cardano relatives a les arrels d'un polinomi, arribem a

$-a-b-c = -a$, és a dir $b+c=0$;

$ab+ac+bc = b$, que amb l'anterior ens duu a $bc = b$ i

$-abc = -c$ és a dir $abc = c$.

De la segona es dedueix que o bé $c=0$ o bé $b=1$.

- Si $c = 0$ ens queda $b = 0$ i $a \cdot 0 = 0$ cosa que ens diu que a pot tenir qualsevol valor.
- Si $b = 1$ serà $c = -1$ i $a \cdot (-1) = -1$ i, per tant, $a = 1$.

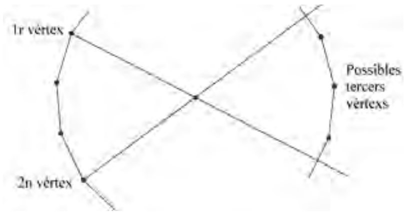
10. Resposta: $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Veurem de manera constructiva quants triangles podem fer que compleixin la condició de l'enunciat i reflexionarem sobre quantes vegades hem comptat cada triangle per tal d'obtenir la resposta al problema.

El primer vèrtex que s'escull del triangle pot ser qualsevol vèrtex del polígon de $2n+1$ costats.

El segon vèrtex, podrà ser qualsevol dels que quedin lliures després d'haver escollit el primer vèrtex. Tenim doncs, en cada cas, $2n$ possibles segons vèrtexs però no ho comptarem globalment perquè el nombre de possibilitats per al tercer vèrtex dependrà de la posició relativa dels dos vèrtexs triats.

Si el menor nombre de vèrtexs del polígon inicial que queden entre els dos vèrtexs triats és k (en direm *vèrtexs-al-mig*), aquest nombre de possibles tries és $1 + k$. Per veure-ho basta traąr els dos diàmetres i es pot raonar a partir del fet que el polígon té un nombre imparell de costats. A la figura es visualitza per al cas $k = 2$.



Per tant, per comptar el total de possibles tries del segon i el tercer vèrtexs una vegada fixat el primer, haurem de fer una suma. Tenim:

- 2 vèrtexs per fer de segon vèrtex amb cap vèrtex-al-mig des del primer vèrtex, i per cadascun d'ells 1 possible tercer vèrtex. És a dir $2 \cdot 1$ possibilitats
- 2 vèrtexs amb un vèrtex-al-mig des del primer vèrtex, i per cadascun d'ells 2 possibles tercers vèrtexs. Afegim doncs $2 \cdot 2$ possibilitats
- 2 vèrtexs amb dos vèrtexs-al-mig des del primer vèrtex, i per cadascun d'ells 2 possibles tercers vèrtexs. Afegim $2 \cdot 3$ possibilitats

... i així successivament fins a

- 2 vèrtexs amb $n - 1$ vèrtexs-al-mig des del primer vèrtex (màxim nombre de vèrtexs-al-mig que hi poden haver entre dos vèrtexs del polígon inicial), i per cadascun d'ells 2 possibles tercers vèrtexs. Afegim $2 \cdot n$ possibilitats

Per tant el nombre total de maneres de triar el segon i el tercer vèrtex després de fixar el primer és $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = n \cdot (n + 1)$ i com que això és per cadascun dels $2n + 1$ vèrtexs del polígon inicial en total hem anat construint $n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$ triangles.
Però fins aquí no s'ha tingut en compte que hi pot haver més d'un triangle que ocupi els mateixos vèrtexs. Com que hi ha tres vèrtexs, les permutacions que es poden fer són 6. Això significa que hi haurà 6 triangles que ocuparan els mateixos vèrtexs del polígon, que en realitat són el mateix però els haurem comptat 6 vegades cada un. Concloem, doncs, que la quantitat de triangles que es poden fer en un polígon de $2n+1$ costats de manera que el centre del polígon estigui a l'interior del triangle és $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Es pot observar que aquest resultat és el mateix que la suma $1^2+2^2+\ldots+n^2$.

XLVII Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Desembre 2010

Primera sessió

1. Tenim 2010 cartes numerades de 1 a 2010. Demostreu que si agafem 11 cartes *qualssevol*, n'hi ha dues (numerades i i j), d'entre aquestes 11, que compleixen $i < j \leq 2i$.

2. En un cercle de radi r hi inscrivim el decàgon regular de vèrtexs

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_{10}.$$

Denotem per $|A_iA_j|$ la longitud del segment $\overline{A_iA_j}$. Demostreu que

$$|A_1A_4| - |A_1A_2| = r.$$

3. Denotem per $S(n)$ la suma

$$S(n) = 2010\,n^{2010} - 2009\,n^{2009} + \cdots + 4n^4 - 3n^3 + 2n^2 - n$$

Comproveu que el nombre

$$T = S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) + S(6) + S(7) + S(8) + S(9)$$

és positiu i calculeu-ne la xifra de les unitats.

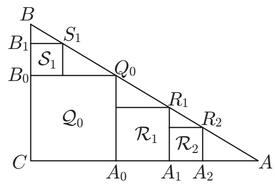
Segona sessió

4. Una urna conté b boles blanques i v boles vermelles, amb $b \geq 0$, $v \geq 0$ i $b+v \geq 3$. Si s'extrauen 3 boles de l'urna sense reemplaçar-les, la probabilitat que totes siguin blanques és p. Però, si afegim una bola blanca a l'urna, la probabilitat que les tres boles siguin blanques augmenta d'una tercera part. Quin és el valor màxim de v que permet que es compleixin aquestes condicions?

5. Tenim un triangle rectangle ABC de catets AC i CB de longituds a i b i hi inscrivim un quadrat $\mathcal{Q}_0 = CA_0Q_0B_0$ de manera que el punt A_0 es troba en el catet CA, el punt B_0 en el catet CB i el punt Q_0 en l'hipotenusa AB.

a) Calculeu el valor q del costat CA_0 del quadrat, en funció de a i b.

b) Repetim el procés n vegades inscrivint, respectivament, quadrats $\mathcal{R}_{k+1}$, $\mathcal{S}_{k+1}$ en els triangles AA_kR_k i BB_kS_k, en què els punts R_k són en el segment AQ_0 i els punts S_k en el segment BQ_0. Si r_n i s_n són les longituds dels costats dels quadrats $\mathcal{R}_n$ i $\mathcal{S}_n$, demostreu que $\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n}$.



---

6. Tenim m capses $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$ que contenen fitxes. El nombre de fitxes de cada una és $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $\ldots$, $q_m \geq 0$, respectivament. Considerem un nombre fix $n \leq m$.

Volem aconseguir, amb una sèrie d'actuacions, que totes les caixes acabin tenint el mateix nombre de fitxes. Cada actuació que efectuem s'ajustarà a l'acció següent: elegim n capses, i col·loquem una fitxa més en cada una de les capses elegides de manera que, després d'haver actuat, les n capses que hàgim elegit tindran una fitxa més que abans de l'actuació, i la resta tindrà el mateix nombre de fitxes que abans de l'actuació. Demostreu:

a) Si $\text{mcd}(m, n) = d > 1$, aleshores hi ha una distribució inicial de fitxes en les m capses que no permet aconseguir mai que, després de qualsevol nombre d'actuacions, totes les capses tinguin el mateix nombre de fitxes.

b) Si $\text{mcd}(m, n) = 1$, aleshores és posible fer un nombre finit d'actuacions successives fins a aconseguir que, al final de totes les actuacions, totes les capses tinguin el mateix nombre de fitxes.

XLVII Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Els resultats

La fase catalana de la XLVII Olimpíada Matemàtica, amb l'organització de la Societat Catalana de Matemàtiques es va celebrar simultàniament a Barcelona, Girona, Lleida i Tarragona els dies 17 i 18 de desembre de 2010.

El tribunal qualificador, que estava presidit pel Dr. Josep Pla Carrera (Universitat de Barcelona) i en formaven part Josep Burillo Puig (Universitat Politècnica de Catalunya, vocal) i Maribel Barrionuevo Peñalves (IES Ernest Lluch, de Barcelona), va prendre l'acord d'atorgar els premis següents:

Primers premis

- Eduard Vázquez Espín,
  Institut de Pallejà (Baix Llobregat), 2n de batxillerat
- Ferran Alet Puig,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 2n de batxillerat
- Darío Nieuwenhuis Nivela,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 1r de batxillerat

Segons premis

- Marc Felipe Alsina,
  Bell-lloc del Pla (Girona), 4t d'ESO
- Eric Milesi Vidal,
  Col·legi Pare Manyanet (Barcelona), 1r de batxillerat
- Marc Sánchez Alfonso,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 1r de batxillerat

Tercers premis

- Joan Estévez Estudis,
  Institut Jaume Vicens Vives (Girona), 2n de batxillerat
- Júlia Alsina Oriol,
  IES Jaume Callís (Vic), 1r de batxillerat
- Jordi Barceló Mercader,
  Col·legi Jesús i Maria (Barcelona), 1r de batxillerat

XLVII Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Solucions

Problema 1. Primera solució. Suposem que les 11 cartes extretes tenen números $n_1 < n_2 < \cdots < n_{11}$. Si hem d'aconseguir que no es compleixi la condició de l'enunciat, haurà de ser $n_{i+1} \geq 2n_i + 1$ per $i = 1, 2, \ldots, 10$. és a dir,

$$
\begin{aligned}
n_1 &\geq 1 \quad (= 2^1 - 1)\\
n_2 &\geq 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (= 2^2 - 1)\\
n_3 &\geq 3 \cdot 1 + 1 = 7 \quad (= 2^3 - 1)\\
&\vdots\\
n_{10} &\geq 1023 \quad (= 2^{10} - 1)\\
n_{11} &\geq 2047 \quad (= 2^{11} - 1)
\end{aligned}
$$

Però això és impossible si només tenim 2010 cartes.

Problema 1. Segona solució. Considerem la partició del conjunt

$$\{1, 2, \ldots, 2010\}$$

en deu subconjunts A_1, A_2, $\ldots$, A_{10} de forma que dos elements $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$, $(i \neq j)$, no compleixin la condició de l'enunciat i, en canvi, dos elements $a_k, a'_k \in A_k$ del mateix subconjunt la compleixin sempre. $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4, 5, 6\}$, $A_3 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,

$A_4 = \{15, 16, 17 \ldots, 29, 30\}$, $A_5 = \{31, 32, \ldots, 61, 62\}$,

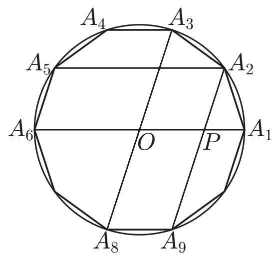
$A_6 = \{63, 64, \ldots, 125, 126\}$, $A_7 = \{127, 128, \ldots, 253, 254\}$,

$A_8 = \{255, 256, \ldots, 509, 510$ $A_9 = \{511, 512, \ldots, 1021, 1022\}$

i $A_{10} = \{1023, 1024, \ldots, 2009, 2010\}$.

Si tenim ara 11 cartes qualssevol, pel *principi de* **Dirichlet** (o del *"colomar"*), dues d'elles hauran de tenir números que pertanyin al mateix subconjunt A_k i, per tant, compliran la condició de l'enunciat.

Problema 2. Primera solució.(*Geomètrica*)



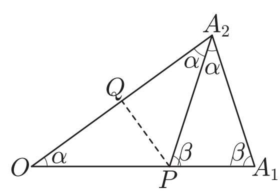
La corda A_2A_9, el diàmetre A_3A_8 i el costat A_5A_6 són paral·lels. També són paral·lels el diàmetre A_1A_6 i la corda A_2A_5. Tenim, per tant, dos paral·lelograms $PA_2A_5A_6$ i POA_8A_9, d'on obtenim que $|PA_9| = |OA_8| = r$ i $|A_1A_2| = |A_5A_6| = |A_2P|$. El resultat surt de $|A_1A_4| = |A_2A_9| = |A_2P| + |PA_9| = |A_1A_2| + r$.

Problema 2. Segona solució.(*Trigonomètrica*)

Sabem que una corda d'angle central α en un cercle de radi r val $2r \sin \dfrac{\alpha}{2}$.
La corda (costat) A_1A_2 té longitud $|A_1A_2| = 2r \sin 18^\circ$. Anàlogament, la corda A_1A_4 té longitud $|A_1A_4| = 2r \sin 54^\circ$. El nostre problema es redueix a demostrar que $2 \sin 54^\circ = 1 + 2 \sin 18^\circ$. Passant a complementaris, això és equivalent a demostrar $2 \cos 36^\circ = 1 + 2 \cos 72^\circ$. Cal, doncs, determinar els valors de $\cos 36^\circ$ i $\cos 72^\circ$. Però si sabem el valor $a = \cos 36^\circ$, aleshores $\sin 36^\circ = \sqrt{1 - a^2}$ i trobem, amb la fórmula de l'angle doble $\cos 72^\circ = \cos^2 36^\circ - \sin^2 36^\circ = 2a^2 - 1$ i el problema s'acaba si podem comprovar que $2a = 2\left(2a^2 - 1\right) + 1$ $(*)$.
Sigui A_1A_2 un costat del decàgon regular de centre O, que ja podem suposar de radi 1. El triangle OA_1A_2 és isòsceles, i si A_2P és la bisectriu de l'angle a A_2 ens queden els angles marcats $\alpha = 36^\circ$ i $\beta = 2\alpha = 72^\circ$. Tindrem $|OP| = |PA_2| = |A_1A_2|$ i també que els triangles OA_1A_2 i A_2PA_1 són semblants. La relació de semblança ens permet calcular el costat, que resulta ser $|A_1A_2| = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Finalment obtenim $\cos 36^\circ$ del triangle rectangle OPQ i resulta

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$



La comprovació de $(*)$ és immediata.

Problema 3.

Els $S(n)$ són tots positius ja que, aparellats els termes de la suma per parelles $kn^k-(k-1)n^{k-1}$, cada parella és positiva i també la suma de totes. Escrivim ara

$$\begin{aligned} S(1) &= 2010 \cdot 1^{2010} - 2009 \cdot 1^{2009} + \cdots + 2 \cdot 1^2 - 1^1 \\ S(2) &= 2010 \cdot 2^{2010} - 2009 \cdot 2^{2009} + \cdots + 2 \cdot 2^2 - 2^1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S(9) &= 2010 \cdot 9^{2010} - 2009 \cdot 9^{2009} + \cdots + 2 \cdot 9^2 - 9^1 \end{aligned}$$

Sumant per columnes les igualtats anteriors ens queda

$$T = 2010\left(1+2^{2010}+\cdots+9^{2010}\right) - 2009\left(1+2^{2010}+\cdots+9^{2010}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(1+2^2+\cdots+9^2\right)-\left(1+2^1+\cdots+9^1\right)$$

Si calculem els residus modulars de i^k mòdul 10 i de la suma $a_k = 1^k + 2^k + \cdots + 9^k$ obtenim

	1^k	2^k	3^k	4^k	5^k	6^k	7^k	8^k	9^k	a_k
$k=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5
$k=2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1	5
$k=3$	1	8	7	4	5	6	3	2	9	5
$k=4$	1	6	1	6	5	6	1	6	1	3
$k=5$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5

que dóna 5 si $k \neq \dot{4}$ i 3 si $k = \dot{4}$. Com que els residus de 1, 2, ..., 2010 mòdul 10 es repeteixen de 10 en 10 i els de les sumes a_k de 4 en 4, podem calcular T mòdul 10 en blocs de 20 ($=\mathrm{mcm}(10,4)$). Calculant un qualsevol d'aquest blocs surt $2010\cdot5-2009\cdot5+2008\cdot3-2007\cdot5+\cdots+1994\cdot5-1993\cdot5+1992\cdot3-1991\cdot5=0$ mòdul 10. A T hi ha 100 blocs d'aquest tipus, que en total sumaran 0, i una cua de 10 sumands més. Calculant directament aquesta cua mòdul 10 queda

$$T = 10\left(1+2^{10}+\cdots+9^{10}\right)-9\left(1+2^9+\cdots+9^9\right)+\cdots$$
$$\cdots+2\left(1+2^9+\cdot+9^9\right)-(1+2+\cdots+9)=$$
$$=0\cdot5-9\cdot5+8\cdot3-7\cdot5+6\cdot5+5\cdot5+4\cdot3-3\cdot5+2\cdot5-1\cdot5=1$$

Problema 4.

Si p és la probabilitat de treure 3 boles blanques abans d'afegir una altra bola blanca, i q és aquesta probabilitat després d'afegir una altra bola blanca, tenim, per hipòtesi que $q = \dfrac{4}{3}\,p$. Estudiem primer els casos baixos.

- Si $b = 0$ $(v \geq 3)$ o $b = 1$ $(v \geq 2)$, aleshores $p = q = 0$ i v pot prendre qualsevol valor i no hi ha màxim.
- Si $b = 2$ $(v \geq 1)$, aleshores $p = 0$, $q \neq 0$ i la condició del problema no es pot complir.
- Suposem, doncs, que $b \geq 3$. Les probabilitats demanades, abans i després d'afegir una bola blanca són, respectivament,

$$p = \frac{b(b-1)(b-2)}{(b+v)(b+v-1)(b+v-2)}\,, \quad q = \frac{(b+1)b(b-1)}{(b+v+1)(b+v)(b+v-1)}$$

La relació $4p = 3q$ es converteix, després de simplificar, en

$$4(b-2)(b+v+1) = 3(b+1)(b+v-2)\,, \quad \text{o bé} \quad b^2 + bv - b - 11v - 2 = 0$$

D'aquesta última expressió surt

$$v = \frac{b^2 - b - 2}{11 - b} = -b - 10 + \frac{108}{11 - b}$$

i com que b, v són enters positius, ha de ser $11 - b$ divisor de 108 i b menor que 11. Aquests possibles valors per $11 - b$ són 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9. Les parelles (b, v) vàlides són $(10, 88)$, $(9, 35$, $(8, 18)$, $(7, 10)$ i $(5, 3)$. La que dóna v màxima és la que correspon a $v = 88$, $b = 10$.

Problema 5.

Per començar, calculem q. La semblança dels triangles rectangles CAB i A_0BD_0 dóna $\dfrac{q}{b} = \dfrac{a-q}{a}$, d'on surt

$$q = \frac{ab}{a+b}$$

A partir d'aquí, la semblança dels dos triangles CAB i A_0BD_0 té raó de semblança

$$\rho = \frac{b}{a+b}.$$

Anàlogament, si fem la semblança entre els triangles CAB i B_0D_0B obtenim la raó

$$\sigma = \frac{a}{a+b}$$

Observem que $\rho + \sigma = 1$. Calculem ara, per semblança, els costats r_n i s_n. Tenim $r_1 = \rho q$, $r_2 = \rho r_1 = \rho^2 q$, ..., $r_n = \rho^n q$. De manera semblant obtenim $s_n = \sigma^n q$. Si fem les arrels n-èsimes d'aquestes dues expressions i sumem queda

$$\sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n} = (\rho + \sigma)\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{q}$$

Problema 6.

Posem $N = q_1 + q_2 + \cdots + q_m$.
També suposarem, si cal, que $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_m$.

a) Si $\mathrm{mcd}(m, n) = d > 1$, com que a cada actuació afegim n fitxes, després de s actuacions haurem afegit ns fitxes de manera que en total quedaran a les capses $N + ns$ fitxes. Si totes les capses tenen el mateix nombre k de fitxes, serà $N + ns = km = \dot{m} = \dot{d}$. Com que també $n = \dot{d}$ haurà de ser $N = \dot{d}$. Per tant, qualsevol distribució inicial de fitxes amb N no múltiple de d no permetrà igualar les capses.

b) Si $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$, l'equació $nx - my = 1$ té solucions enteres, per exemple, (x_0, y_0). A més, sabem que les solucions són els punts de coordenades enteres sobre la recta del pla $nx - my = 1$, punts que s'obtenen a partir del (x_0, y_0) sumant múltiples enters del vector (m, n) o, dit altrament, la solució general és $(x, y) = (x_0, y_0) + t(m, n)$ per qualsevol t enter. Fent t positiu i prou gran podem aconseguir que una solució (x, y) tingui la x i la y positives. Sigui (s, r) una d'aquestes solucions.

Serà, doncs, $ns = mr + 1$. Aquesta igualtat ens permet afirmar que després de s actuacions haurem pogut posar ns fitxes que les podem distribuir en la forma de r per capsa, més una que ens sobrarà que la posarem a la capsa que en té menys, $\mathcal{C}_1$. Haurem disminuït la diferència $q_n - q_1$ en una unitat i les altres diferències $q_n - q_2$, ..., $q_n - q_{n-1}$ quedaran igual. Ara és evident que després de repetir aquest procediment de s actuacions tantes vegades com faci falta (en total $q_n - q_1 + q_n - q_2 + \cdots + q_n - q_{n-1} = nq_n - N$ vegades) haurem igualat les fitxes a les capses.

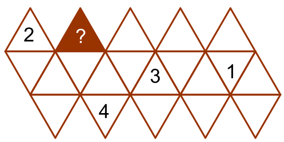
El total d'actuacions haurà estat $s(nq_n - N)$.

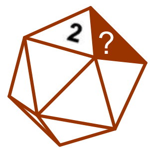
Problemes a l’esprint

Equips d’alumnes de Batxillerat. Gener 2011

Problemes de la branca d’olivera

1. La figura mostra el desplegament d’un icosàedre, on hi ha quatre cares numerades.





Volem numerar les cares de manera que, una vegada confegit l’icosàedre, les cinc cares que concorren en cada vèrtex estiguin numerades amb els números 1, 2, 3, 4, i 5. És a dir, en cada vèrtex, una cara amb cada número.
Quin nombre ha d’anar a la cara marcada amb el signe d’interrogació?

La solució del problema 1 s’ha de passar al problema 8 com a nombre H.

2. Si x, y són dos nombres reals diferents que compleixen

$$2011x - \frac{2012}{x} = 2011y - \frac{2012}{y},$$

quin és el valor de $x \cdot y$?

3. $ABCDE$ es un pentàgon del pla que té els vèrtexs, en un sistema de coordenades cartesianes rectangulars, en els punts de coordenades enteres $A(0,0), B(11,0), C(11,2), D(6,2)$ i $E(0,8)$. El volem dividir en dos polígons d’igual àrea mitjançant una recta de la forma $x = k$. Calcula el valor de k i comprova que el pots escriure com $k = a + b\sqrt{c}$ per a tres nombres enters a, b, c. Al formulari de resposta hauràs d’indicar els valors de a, b, c que corresponen al valor de c més petit possible.

Per tal de trobar la resposta numèrica del problema 4 necessiteu un nombre T que us han de passar des del problema 5.

4. Calculeu el valor mínim que pren la funció $f(x) = x^2 - Tx + (T+2)$ en el conjunt de nombres reals x que compleixen $x^2 + Tx + (T-1) \leq 0$.

Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor M la resposta numèrica d'aquest problema.

Problemes del colom de la pau

5. Quatre nombres enters positius a, b, c, d compleixen

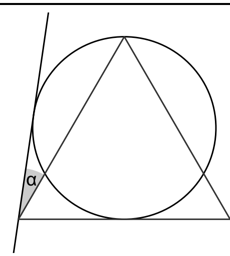
$$abcd + abc + bcd + cda + dab + ab + bc + cd + da + ac + bd + a + b + c + d = 209.$$

Quin és el valor de $a + b + c + d$?

La resposta s'ha de passar al problema 4, com a T.

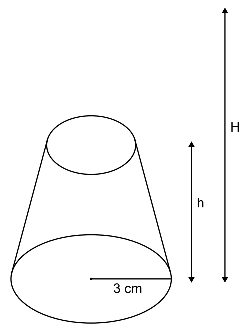
6. Una funció f definida en el conjunt dels nombres enters positius compleix: $f(1) = 1$ i, per a qualsevol valor nombre enter positiu n, $f(2n) = f(n) + 1$ i $f(2n+1) = f(2n)$. Calcula el valor de f(2011).

7. Dibuixem un triangle equilàter i una circumferència que té com a diàmetre una de les altures del triangle. Des d'un dels vèrtexs del triangle tracem la tangent a la circumferència, com es veu a la figura. Si designem com α l'angle que forma aquesta tangent amb el costat més proper del triangle, $\cos(\alpha)$ resulta ser un nombre racional. Escriu-lo com una fracció irreductible.



Per al problema 8 es necessita un nombre H, que passa del problema 1.

8. El frust de la figura (tronc de con recte) s'ha obtingut tallant un con recte per un pla paral·lel a la base i llevant el petit con de la part superior al tall. Així s'ha obtingut un cos amb dues cares circulars (bases) i una superfície corba. El con original té com a radi de la base 3 cm i tenia altura H cm. L'àrea lateral del frust (és a dir la de la superfície corba) és igual a la suma de les àrees de les bases. Quina és l'altura h del frust?



Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor N la resposta d'aquest problema, sense unitats.

Reptes finals

Per resoldre aquest problema cal conèixer nombres M i N que passen dels problemes 4 i 8.

9. Per a la funció $f(x) = ax + b$ observem que

$$f(f(f(1))) = M$$

i que

$$f(f(f(0))) = N.$$

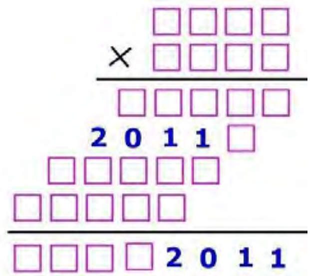
Calculeu el valor de x per al qual $f(x) = 2011$ i escriviu-lo com una fracció irreductible.

10. La Paula tira, successivament, quatre vegades un dau i amb els punts que marca el dau traduïts a xifres escriu un nombre de quatre xifres. Per exemple pot obtenir 5612 o 1234 o 3333. Calculeu quants dels nombres que pot obtenir la Paula tenen la propietat que cada xifra és més gran o igual que l'anterior, com per exemple succeeix en 1234 o 1125 o 4446.

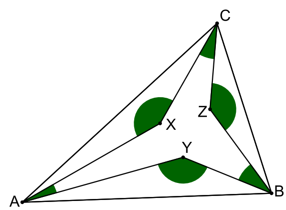
Reptes voluntaris

11. Quins són els dos factors de la multiplicació de la figura?

(Cada quadradet representa una xifra; cap de les files comença per 0 i no apareixen altres xifres que no tinguin quadradet si es fan tots els càlculs de la multiplicació)



12. Considerem tres punts X, Y, Z situats a l'interior d'un triangle ABC, tal com es mostra a la figura, és a dir que cap parella dels segments AX, AY, BY, BZ, CZ, CX té altres punts en comú que algun dels vèrtexs ABC. D'aquesta manera queda dibuixada una estrella (irregular) de tres puntes. Determineu (en graus sexagesimals) l'interval de valors al qual pot pertànyer la suma dels sis angles marcats a la figura.



Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de Batxillerat. Gener 2011

Participació i centres destacats

A partir d'aquesta XIX edició dels **Problemes a l'esprint** adreçada a equips d'alumnes de les edats que participen en la prova Cangur es va decidir desdoblar la convocatòria, una per a equips d'alumnes de batxillerat, que és la que es comenta aquí i que es va desenvolupar el dia 26 de gener de 2011 i una altra per a alumnes d'ESO.

Van participar 40 equips, de Catalunya i el País Valencià. Van enviar totes les respostes correctes un total de 10 equips.

Des de la comissió organitzadora agraïm la participació i donem un generalitzat "premi a la constància" per l'estona que els equips participants vàreu dedicar a fer matemàtiques, encara que no trobéssiu la solució a tots els problemes.

Centres més destacats

- Aula, Escola Europea, de Barcelona, centre guanyador de l'activitat
  Va tenir encert ple, al primer intent, amb un temps de 51 minuts.
- Pòdium de l'activitat
  Institut Arquitecte Manuel Raspall, de Cardedeu (Vallès Oriental)
  amb un temps aproximat d'una hora i un quart, al segon intent.
  Institut Les Corts, de Barcelona
  amb un temps aproximat d'una hora i mitja, al primer intent.

Altres equips que van encertar totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

Institut Violant de Casalduch, Benicàsssim (La Plana Alta)
Institut Jaume Vicens Vives, Girona (Gironès)
Institut Samuel Gili i Gaya, Lleida (Segrià)
Institut Pius Font i Quer, Manresa (Bages)
Col·legi Sagrat Cor de Jesús, Terrassa (Vallés Occidental)
(dos equips que treballaven independentment)
Institut Montserrat Roig, Terrassa, (Vallés Occidental)
(únic equip que va respondre correcta els dos reptes "de propina")

Altres equips participants
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

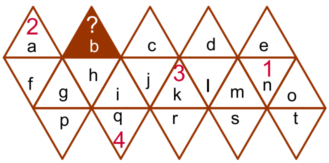
IES Sucro, Albalat de la Ribera (Ribera Baixa)
IES Bellaguarda, Altea (Marina Baixa)
Institut d'Argentona (El Maresme)
Insitut Júlia Minguell, Badalona (Barcelonès)
Immaculada Concepció, Horta (Barcelona)
Casa del Roure - Oak House School, (Barcelona)
Institut Montserrat, Barcelona (Barcelonès)
ICCIC Batxillerats, Barcelona (Barcelonès)
Institut Consell de Cent, Barcelona (Barcelonès)
Institut Ridaura, Castell Platja d'Aro (Baix Empordà)
Institut de Castelló d'Empúries (Alt Empordà)
Madre Vedruna Sagrado Corazón, Castelló (La Plana Alta)
Institut de Deltebre (Baix Ebre)
Institut Alexandre Deulofeu, Figueres (Alt Empordà)
Saint George's School, Fornells de la Selva (Gironès)
Institut Pere Fontdevila, Gironella (Berguedà)
Institut Manuel Blancafort, La Garriga (Vallès Oriental)
Institut El Pedró, L'Escala (Alt Empordà)
Institut de Llançà (Alt Empordà)
Institut Pompeu Fabra, Martorell (Baix Llobregat)
Institut Martí l'Humà, Montblanc (Conca de Barberà)
Institut Montserrat Miró i Vilà, Montcada i Reixac (Vallès Occidental)
Institut Montsacopa, Olot (La Garrotxa)
Institut Cristòfol Ferrer, Premià de Mar (El Maresme)
Escola Pia de Sabadell (Vallès Occidental)
Institut Jaume I, Salou (Tarragonès)
Escola Tecnos, Terrassa (Vallès Occidental)
Institut Narcís Oller, Valls (Alt Camp)
Institut Jaume Callis, Vic (Osona)
Institut Torre Roja, Viladecans (Baix Llobregat)

Batxillerat. Gener 2011

Branca d'olivera. Solucions

1. Solució: **4**.

Indiquem els triangles, cares de l'icosàedre, com en aquesta figura:



Com que l'1 és a **n** no pot anar a cap dels **d, e, l, m** ni tampoc a **o, s, t**. Per tant si ara ens fixem en **k, l, m, r, s**, que concorren en un vèrtex, veiem que l'1 ha d'anar a **r** i que a **i, j** hi van el 2 i el 5 en algun ordre. A partir d'aquí i del lloc on és el 3, si ens fixem en **c, d, j, k, l**, com que l'1 no pot ser a **l** ni a **d** deduïm que ha de ser **c**=1. Podem continuar fixant-nos en **b, c, h, i, j** i, com que el 4 no pot anar a **h** resulta que a la casella **b**, la de l'interrogant, hi ha d'anar el 4.

De fet es pot deduir quin nombre ha d'anar a cada una de les cares.

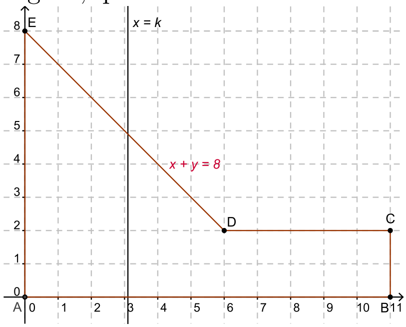
Passa $H = 4$ al problema 8

2. Solució: $xy = -2012/2011$.

A partir de $2011x - \dfrac{2012}{x} = 2011y - \dfrac{2012}{y}$ passem a $2011x - 2011y = \dfrac{2012}{x} - \dfrac{2012}{y}$ i si ara operem en el segon membre i traiem factor comú obtenim $2011(x - y) = \dfrac{2012(y - x)}{xy}$. Com que $x \neq y$ podem simplificar $(x - y)$ i arribem a $2011 = -\dfrac{2012}{xy}$ i d'aquí s'arriba ràpidament al resultat enunciat.

3. Solució: $k = 8 - 2\sqrt{6}$.

Vegem la figura, que té una àrea total de 40 unitats d'àrea .



És clar que la recta buscada $x = k$ ho serà per $k < 6$ i que haurem de descompondre el pentàgon inicial en un trapezi i un pentàgon.

Es pot veure que l'equació de la recta DE és $x + y = 8$ i, doncs, els vèrtexs del trapezi sobre la recta $x = k$ són $(k, 0)$ i $(k, 8 - k)$. Per tant les bases del trapezi són 8 i $8 - k$ i l'altura n'és k. L'àrea, que ha de ser 20, és $\dfrac{8 + 8 - k}{2} \cdot k$.

Si resolem l'equació que resulta trobem $k = \dfrac{16 \pm \sqrt{96}}{2}$ que podem escriure com $k = 8 \pm \sqrt{24} = 8 \pm 2\sqrt{6}$ però com que el valor de k que ens interessa ha de ser més petit que 6 la solució del problema és la que s'ha indicat.

Del problema 5 passa $T = 13$

4. Solució: **29**.

Com que les solucions de $x^2 + 13x + 12 = 0$ són $x = -12, x = -1$, el conjunt de nombres reals que interessa, és a dir els x que compleixen $x^2 + 13x + 12 \leq 0$ és l'interval $[-12, -1]$. Si examinem la funció de l'enunciat, $f(x) = x^2 - 13x + 15$, té forma d'U i el vèrtex en el punt corresponent a $x = \dfrac{13}{2}$ i per tant en l'interval $[-12, -1]$ és decreixent. El valor mínim s'assolirà per $x = -1$ i aquest valor és $f(-1) = 1 + 13 + 15 = 29$.

El valor $M = 29$ passa al problema 9

Colom de la pau. Solucions

5. Solució: **13**.

L'expressió que compleixen els nombres a, b, c, d es pot escriure així;

$$(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdot(d+1)-1=209.$$

Per tant, ha de ser $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdot(d+1)=210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ i, doncs, com que els enters $a, b, c, d \geq 0$ l'única possibilitat és que els factors siguin $\{a+1, b+1, c+1, d+1\}=\{2,3,5,7\}$ és a dir $\{a,b,c,d\}=\{1,2,4,6\}$ i d'aquí $a+b+c+d=13$.

Passa $T=13$ al problema 4.

6. Solució: **11**.

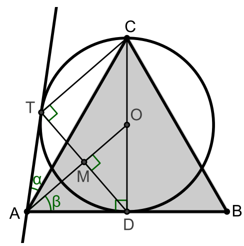
A partir de $f(1)=1$ i de $f(2n)=f(n)+1$ arribem a $f(2)=2, f(4)=3, f(8)=4, \ldots, f(2^n)=n+1$.

Per la condició $f(2n+1)=f(2n)$ veiem que $f(3)=f(2)=2$. Si multipliquem el 3 per 2 deduïm que $f(6)=f(3\cdot 2)=f(3)+1=3$ i aleshores amb l'altra propietat veiem que $f(5)=f(4)=3, f(7)=f(6)=3$ és a dir que tots els nombres entre 4 i 8 tenen la mateixa imatge, 3. Si ara multipliquem per 2 tots els nombres entre 4 i 8, a partir de $f(2n)=f(n)+1$ veurem que els nombres parells entre 8 i 16 tenen tots com a imatge 4 i aleshores per $f(2n+1)=f(2n)$ raonarem que els nombres imparells entre 8 i 16 tenen també tots per imatge 4. Ho podem generalitzar.

Imaginem que ja hem vist que tots els nombres entre 2^n i 2^{n+1} tenen per imatge $n+1$. Si els multipliquem per 2, per $f(2n+1)=f(2n)$ veurem que tots els nombres parells entre 2^{n+1} i 2^{n+2} tenen per imatge $n+1$ i després, per $f(2n+1)=f(2n)$ deduirem que els nombres imparells entre 2^{n+1} i 2^{n+2} tenen també per imatge $n+2$.

Vist això, com que $2^{10}<2011<2^{11}$, serà $f(2011)=11$.

7. Solució: $\dfrac{13}{14}$.



Si dibuixeu la figura amb el GeoGebra i escriviu **FraccióText[cos(α)]** obtindreu 13/14. Val a dir que s'ha d'anar amb compte amb aquesta comanda del GeoGebra perquè escriu "com a fracció" qualsevol nombre, racional o no.

Farem els càlculs posant que el costat del triangle és 1. El costat AB és tangent a la circumferència en el seu punt mitjà i, per tant, $AD = 1/2$ i com que AT és l'altra tangent, també $AT = 1/2$.

Com que si O és el centre de la circumferència, OD és la meitat de l'altura del triangle, $OD = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ i, pel teorema de Pitàgores, $OA = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

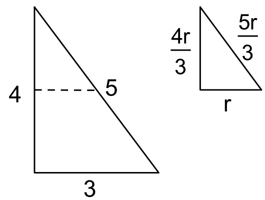
Per la simetria de la figura, AO, que és la bisectriu de les dues tangents, és perpendicular a TD, segment que uneix els dos punts de tangència. L'angle en T és recte perquè és un angle inscrit que comprèn mitja circumferència. Per tant, OA i CT són paral·leles i l'angle en O del triangle rectangle DOA és igual a l'angle en C del triangle rectangle TCD i, doncs, aquests dos triangles són semblants. Es compleix $\dfrac{DO}{TC} = \dfrac{OA}{CD}$, és a dir $\dfrac{\sqrt{3}/4}{TC} = \dfrac{\sqrt{7}/4}{\sqrt{3}/2}$ i d'ací $TC = \dfrac{3}{2\sqrt{7}}$ i coneixem tots els costats del triangle ATC perquè $AT = 1/2, AC = 1$. Si apliquem el teorema del cosinus per al costat oposat a l'angle α obtenim $cos(\alpha) = 13/14$.

Una demostració alternativa es pot fer a partir de les fórmules trigonomètriques d'addició i subtracció d'angles. En el triangle rectangle DOA podem saber $\sin(\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ i $\cos(\beta) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$. Posem $\gamma = \angle TAD = 2\beta$. Amb les fórmules de l'angle doble podem conèixer $\sin(\gamma) = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ i $\cos(\gamma) = \dfrac{1}{7}$. Finalment, per la fórmula del cosinus de la diferència podem obtenir $\cos(\alpha) = \cos(\gamma - 60°) = 13/14$.

Del problema 1 passa $H = 4$

8. Solució: **2 cm**.

Imaginem en secció el con sencer i el petit con que hem tallat per tenir el frust:



A partir de les dades conegudes deduïm que la generatriu del con sencer seria 5 cm. Si indiquem com r el radi del con petit, per semblança de triangles n'obtenim l'altura i la generatriu.

La condició de l'enunciat, posant l'àrea lateral del frust com l'àrea lateral del con sencer menys l'àrea lateral del con retallat, ens diu $9\pi + \pi r^2 = 15\pi - \pi r \cdot \dfrac{5r}{3}$. Si resolem aquesta equació obtenim $r = 1,5$ d'on l'altura del con retallat és $\dfrac{4r}{3} = 2$ i l'altura del frust $h = H - 2 = 2$ cm.

El valor $N = 2$ passa al problema 9.

Solucions als reptes finals

Dels problemes 4 i 8 passen $M = 29$ i $N = 2$

9. Solució: $\dfrac{26141}{39}$.

Si $f(x) = ax+b$ tenim que $f(f(f(x))) = a(a(ax+b)+b)+b = a^3x+a^2b+ab+b$ i, per tant, $f(f(f(0))) = 2 = a^2b + ab + b$ i $f(f(f(1))) = 29 = a^3 + a^2b + ab + b = a^3 + (a^2b + ab + b) = a^3 + 2$ d'on resulta $a^3 = 27$ i per tant $a = 3$. Serà $2 = a^2b + ab + b = 9b + 3b + b = 13b$ i $b = \dfrac{2}{13}$. Així doncs busquem un valor de x que compleixi $f(x) = 3x + \dfrac{2}{13} = 2011$. Aquest valor, escrit com una fracció irreductible és $x = \dfrac{26141}{39}$.

10. Solució: **126**.

Mirarem primer les possibilitats que comencin per 1 i podrem establir un mètode recurrent per comptar tots els casos i obtenir la solució. Designarem com $N(n, k)$ el nombre de possibilitats per a escriure nombres de n xifres, totes elles de l'1 al k i que quedin en ordre creixent dels valors de les xifres. Ens podem adonar que $N(4, 6) = N(3, 6) + N(4, 5)$ perquè de nombres que interessen i que comencen per 1 (xifra que haurà d'anar seguida per un nombre de tres xifres com els de l'enunciat) n'hi ha $N(3, 6)$. Per altra banda nombres que interessen i que comencen per una xifra més gran que 1, és a dir que les xifres es triaran en $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, n'hi ha $N(4, 5)$ (penseu que n'hi ha tants com nombres de 4 xifres en ordre creixent triades en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$). Semblantment raonaríem en general que $N(n, k) = N(n-1, k)+N(n, k-1)$. Podem omplir la taula següent i obtenim la solució:

$$\begin{tikzcd}
N(4,1) \arrow[r] & N(4,2) \arrow[r] & N(4,3) \arrow[r] & N(4,4) \arrow[r] & N(4,5) \arrow[r] & N(4,6) \\
N(3,1) \arrow[r] & N(3,2) \arrow[r] \arrow[u] & N(3,3) \arrow[r] \arrow[u] & N(3,4) \arrow[r] \arrow[u] & N(3,5) \arrow[r] \arrow[u] & N(3,6) \arrow[u] \\
N(2,1) \arrow[r] & N(2,2) \arrow[r] \arrow[u] & N(2,3) \arrow[r] \arrow[u] & N(2,4) \arrow[r] \arrow[u] & N(2,5) \arrow[r] \arrow[u] & N(2,6) \arrow[u] \\
N(1,1) & N(1,2) \arrow[u] & N(1,3) \arrow[u] & N(1,4) \arrow[u] & N(1,5) \arrow[u] & N(1,6) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

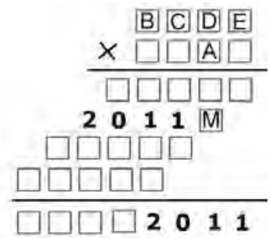
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 126 \\
1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[u] \\
1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[u] & 6 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[u] \\
1 & 2 \arrow[u] & 3 \arrow[u] & 4 \arrow[u] & 5 \arrow[u] & 6 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Hem pogut reconèixer una de les propietats dels nombres combinatoris que, de fet, ens poden donar una manera directa d'arribar al resultat. Vegem-ho. Si $\{a, b, c, d\}$ són les xifres d'un dels nombres que busquem, escrites en l'ordre en què hi apareixen, aleshores $\{a, b + 1, c + 2, d + 3\}$ són quatre nombres diferents triats en el conjunt $\{1, \ldots, 9\}$. De quantes maneres podem fer la tria? $\binom{9}{4} = 126$. I com que, recíprocament, per cada combinació de quatre nombres del conjunt $\{1, \ldots, 9\}$, que podem escriure en ordre creixent dels seus elements, $\{m, n, p, q\}$, si fem $\{m, n - 1, p - 2, q - 3\}$ obtenim les quatre xifres d'un dels nombres de l'enunciat, concloem que 126 és la solució del problema.

Diguem finalment que si coneixem el concepte i la fórmula de les combinacions amb possible repetició, ens podem adonar que les xifres $\{a, b, c, d\}$ d'un dels nombres que busquem constitueixen una combinació amb possible repetició dels nombres $\{1, \ldots, 6\}$ agafats de 4 en 4. La solució del problema serà $CR_{6,4} = \binom{9}{4} = 126$.

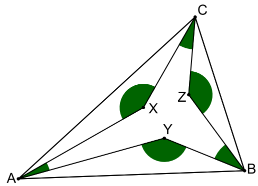
Solucions als reptes voluntaris

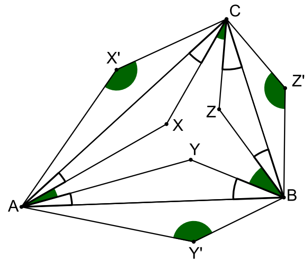
11. Solució: 4023×4957.



Proposem un dels molts camins per a trobar la solució. Es tracta de pensar Quines possibilitats hi ha perquè $A \times BCDE = 2011M$? No n'hi ha gaires; les analitzarem per veure si el producte pot acabar en 1.
A ha de ser més gran que 2 perquè altrament $2011M$ dividit per A donaria de cinc xifres.
Provem amb $A = 3$. Dividim $2011M$ per 3 i hauria de ser 3×6704 o 3×6705 o 3×6706 però cap d'aquestes possibilitats serveix perquè després el producte final pugui acabar en 1.
Per $A = 4$ trobem $B = 5$ i les possibilitats 4×5028 o 4×5029. Per l'1 final a priori podria ser aquesta i el segon factor seria de la forma $PQ49$ però $5029 \times PP49$ no acaba en 11.
Si pensem $A = 5$ i dividim $2011M$ per 5 trobem $B = 4$ i veiem que podria ser 5×4022 o 5×4023 però ha de ser aquesta última possibilitat perquè el producte total, que s'haurà d'obtenir fent $4023 \times PQ57$ pugui acabar en 1 i, de fet acaba en 11. Perquè el producte acabi en 011, una vegada escrites les dues primeres files de productes parcials, veiem que la segona xifra del segon factor ha de ser un 9 perquè la darrera xifra de la tercera fila de productes parcials sigui un 7. Per acabar escriurem el tercer producte parcial i veurem que, a fi i efecte que el producte sencer acabi en 2011, la darrera xifra del quart procute parcial ha de ser un 2 i aleshores el segon factor ha de ser 4957 .
Amb $A = 6$ i $A = 7$ ens passa com amb $A = 4$, trobem a priori dues possibilitats perquè $A \times BCDE = 2011M$ de les quals una la descartem perquè el producte total no pot acabar en 1 i l'altra perquè no acaba en 11; amb $A = 8$ i $A = 9$ ens passa com amb $A = 3$, cap de les possibilitats que trobem a priori serveix perquè el producte acabi en 1. Per tant l'única solució és la que ja hem comentat.

12. Solució: **(360°, 720°)**.





Si fem els simètrics dels punts X, Y, Z respecte els costats AC, AB, BC queda determinat un hexàgon $AY'BZ'CX'$. Es pot veure que la suma dels angles d'aquest hexàgon (720°) és igual a la suma S dels angles demanats més dues vegades la suma s dels angles marcats a la figura sense ombrejar. Podem observar que $0° < s < 180°$ perquè a s li manquen els angles de les puntes de l'estrella per ser igual a la suma dels angles del triangle ABC. Aleshores com que $S = 720° - 2s$ serà $360° < S < 720°$.

Per altra banda es pot veure que s pot ser tan petit, proper a 0° com es vulgui fent els angles de les puntes de l'estrella tan propers als angles del triangle com faci falta i també s pot ser tan proper a 180° com es vulgui fent que els punts X, Y, Z pràcticament coincideixen en un punt.

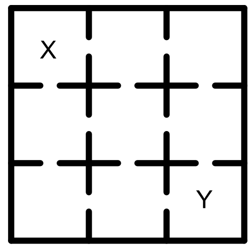
Per tant la suma S demanada pot recórrer tot l'interval (360°, 720°).

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 3r i 4t d'ESO. Febrer 2011

Problemes de la branca d'olivera

1. En un laberint quadrat com el de la figura hi ha nou sales, amb portes en tots els envans que separen les sales. Quan una persona travessa una porta, immediatament aquella porta es tanca i ja no es pot tornar a obrir. Quants camins diferents hi ha per anar des de la sala **X** fins a la sala **Y**?



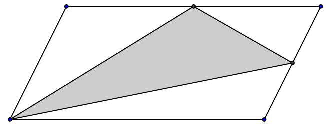
La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 8 com a nombre P.

2. Una pilota de futbol està formada per 12 pentàgons regulars i 20 hexàgons regulars. Els costats dels pentàgons i dels hexàgons tenen una longitud de 4,5 cm. Quina és, expressada en cm, la longitud total de les costures que mantenen enganxats els pentàgons i els hexàgons?

3. A l'Anna i a en Biel els agrada prendre xarop de menta. Per fer-se'n un vas cadascú, l'Anna barreja 50 ml de xarop amb 200 ml d'aigua. En Biel barreja 60 ml de xarop amb 190 ml d'aigua. S'adonen que en els dos vasos no hi ha la mateixa proporció de xarop i, en canvi, els agradaria que sí que fos així. En Biel diu: *Fàcil! Com que el meu xarop és més espès, jo et puc passar una part del contingut del meu got i així podem igualar les proporcions de xarop!*
Si això que diu en Biel és cert, calculeu quants ml de líquid ha de passar en Biel del seu got al got de l'Anna perquè les proporcions sigualin. Ara bé, si creieu que no és possible fer el que diu en Biel, al formulari de resposta haureu de contestar simplement **No**.

Per tal de trobar la resposta numèrica del problema 4 cal un nombre A que passa del problema 5.

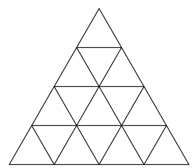
4. En el parall·lelogram de la figura hem dibuixat un triangle unint un vèrtex amb els punts mitjans dels dos costats que no concorren en aquell vèrtex. Si l'àrea d'aquest triangle és de A cm^2, quants cm^2 té l'àrea del paral·lelogram inicial?



Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor M la resposta numèrica d'aquest problema.

Problemes del colom de la pau

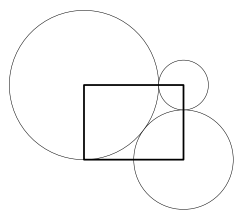
5. L'àrea del triangle equilàter més gran que podeu veure a la dreta és de 16 unitats d'àrea. A la figura s'hi poden comptar 27 triangles equilàters. Quina és la suma de les àrees de tots aquests triangles equilàters?



La resposta s'ha de passar al problema 4, com a A.

6. Quants nombres enters positius són divisors de 6^7 o de 8^9 però **no** d'aquests dos nombres alhora?

7. A la figura es veu un rectangle i tres cercles tangents, que tenen els centres en tres vèrtexs del rectangle i un dels cercles passa pel quart vèrtex.
Això no és pas possible amb tots els rectangles, però amb aquest, que té el costat gran de 4 unitats, sí que s'ha pogut fer. Quin és el radi del cercle més petit dels tres?



Per al problema 8 es necessita un nombre P, que passa del problema 1.

8. Un constructor sap que un dels seus paletes podria acabar una paret en 9 hores i un altre estaria 10 hores a acabar la mateixa feina. També sap que si treballen junts posen entre tots dos P maons menys per hora que si comptéssim els que posarien entre tots dos treballant per separat. Però el constructor té pressa i els posa a treballar tots dos junts i aleshores acaben la paret en 5 hores. Quans maons han fet falta per a construir tota la paret?

Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor N la resposta d'aquest problema, sense unitats.

Reptes finals

Per resoldre aquest problema cal conèixer nombres M i N que passen dels problemes 4 i 8.

9. Anem escrivint el 0 i els nombres naturals, correlativament fins al 2011, amb la disposició següent:

0 1 2
3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21 22 23
24 25 26 ... ...

Quants nombres tindrà el nombre $M+N$ a la seva dreta, en la mateixa fila on ha quedat escrit el $M+N$?

10. En Ramon voldria escriure el resultat de $2^{1000000}$. Però abans de començar, s'ho pensa una mica i vol fer una estimació de quant li ocuparia l'esmentat nombre. Fa una prova escrivint les xifres petites i veu que li anirà bé escriure quatre xifres per cm i per anar ràpid a fer l'estimació decidex que prendrà com si fos $2^{10} = 1000$. Doneu, arrodonida a un nombre enter de metres, la longitud que **estima** en Ramon que abastarà el nombre $2^{1000000}$.

Reptes voluntaris

11. Ja us podeu imaginar que els components de la comissió no ens inventem tots els problemes, sinó que consultem publicacions. Com que ara en volem posar un que hem llegit a *The United Kingdom Mathematics Trust Yearbook*... doncs us el deixarem en anglès, tal com l'hem trobat!

The first and second terms of a sequence are added to make the third term:

$$\textit{first term} + \textit{second term} = \textit{third term}$$

Adjacent odd-numbered terms are added to make the next even-numbered term, for example

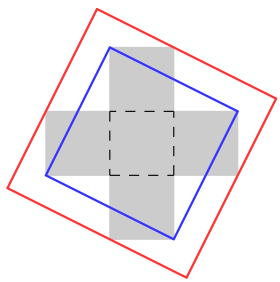
$$\textit{first term} + \textit{third term} = \textit{fourth term} \quad \text{and}$$
$$\textit{third term} + \textit{fifth term} = \textit{sixth term}$$

Likewise, adjacent even-numbered terms are added to make the next odd-numbered term, for example,

$$\textit{second term} + \textit{fourth term} = \textit{fifth term.}$$

Given that the seventh term equals the eight term, what is the value of the sixth term?

12. A la figura es veu una creu formada per cinc quadrats iguals, cadascun d'ells d'àrea 1 unitat d'àrea. Quatre vèrtexs de la creu són vèrtexs d'un quadrat i uns altres quatre vèrtexs de la creu pertanyen als costats d'un quadrat més gros que l'anterior de manera que els costats dels dos quadrats són paral·lels. Quantes unitats d'àrea té el quadrat exterior?



Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 3r i 4t d'ESO. Febrer 2011

Participació i centres destacats

A partir d'aquesta XIX edició dels **Problemes a l'esprint** adreçada a equips d'alumnes de les edats que participen en la prova Cangur es va decidir desdoblar a convocatòria, una per a equips d'alumnes de batxillerat, que es va desenvolupar el gener una altra per a alumnes de l'antic segon cicle d'ESO, celebrada el dia 9 de febrer de 2011 que és la que es comenta aquí.

Van participar 1321 alumnes, agrupats en 65 equips, de poblacions de 23 comarques de Catalunya, el País Valencià i les illes Balears.
Han enviat totes les respostes correctes un total de 20 equips.

La crònica publicada a la web deia així:
Des de la comissió organitzadora agraïm la participació i els missatges que ens diuen que heu passat una estona agradable dedicant-vos a fer problemes, *encara que no hagueu trobat la solució a tots els reptes. Aquest* gust per les matemàtiques *(a través de la resolució de problemes, com si no?) és l'objectiu de l'activitat dels* **Problemes a l'esprint**

Centres més destacats

Els **equips guanyadors** de l'activitat, declarats ex aequo, són els del centres

- Col·legi Regina Carmeli, de Rubí (Vallès Occidental) i
- Escola Joan Pelegrí, de Barcelona (Barcelonès)

que van tenir encert ple, al primer intent, amb un temps de concurs aproximat de 58 minuts.

Pòdium de l'activitat, també ex-aequo

- Institut Arquitecte Manuel Raspall, de Cardedeu (Vallès Oriental)
- Aula Escola Europea, de Barcelona (Barcelonès)

que van tenir encert ple, al primer intent, amb un temps de concurs aproximat de 63 minuts i que també van enviar les respostes correctes als dos reptes suplementaris, fora de concurs.

Altres equips que van encertar totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)
(s'indiquen amb (*) els centres que han enviat les respostes als reptes suplementaris, fora de concurs)

En un temps inferior a una hora i mitja:

IES Bellaguarda d'Altea (Marina Baixa) (*)
Institut Doctor Puigvert de Barcelona (Barcelonès)
Institut les Corts de Barcelona (Barcelonès)
La Salle de Girona (Gironès) (*)
Col·legi Jardí de Granollers (Vallès Oriental)
Institut Samuel Gili i Gaya de Lleida (Segrià) (*)
i Institut Narcís Oller de Valls (Alt Camp)

La llista d'equips que han enviat el formulari amb totes les respostes correctes es completa amb els següents:

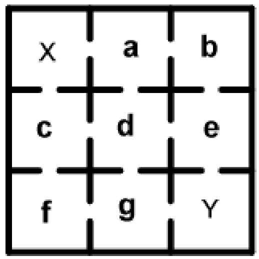
Institut de Deltebre (Baix Ebre)
Institut el Pedró de l'Escala (Alt Empordà)
Institut Santa Eugènia de Girona (Gironès)
Institut Montserrat Miró i Vilà de Montcada (Vallès Occidental)
Institut Doménech i Montaner de Reus (Baix Camp)
Escola l'Avet de Sant Celoni (Vallès Oriental) (*)
Institut de Sant Quirze del Vallès (Vallès Occidental) (*)
Col·legi Claret, de Valls (Alt Camp) (*)
i Col·legi Cor de Maria, de Valls (Alt Camp) (*)

Problemes a l'esprint

3r i 4t d'ESO. Febrer 2011

Branca d'olivera. Solucions

1. Solució: **16**.



Estudiarem primer els camins que només passen una vegada per cada sala per on passen i després els que puguin passar dos cops per una sala.
Per altra banda, amb les lletres que hem posat a la figura per indicar les sales, només comptarem els camins que passin per **a** perquè per cada camí per **a** n' hi ha un altre per **c**, simètric.
Per exemple **XadeY** i **XcdgY**.
Els camins que comencen **Xa** després han de passar per **b** o per **d**. Com que no es parla en cap moment de "camins més curts", podeu veure que hi ha tres camins que comencen **Xab**, que són **XabeY**, **XabedgY** i **Xabedcfgy**. Semblantment n'hi ha tres per **d**, a saber, **XadeY**, **XadgY** i **Xadcfgy**.

La condició que una porta es tanca immediatament quan una persona l'ha travessat i ja no es torna a obrir, ens diu que per poder passar dues vegades per una sala, aquesta ha de tenir quatre portes; altrament la persona es quedaria a dintre quan hi entrés per segona vegada. Per tant l'única sala per la qual es pot passar dues vegades és la **d**. Hi ha dos camins que comencen **Xa** i passen per **d** dues vegades, que són **XadgfcdeY** i **XadcfgdeY**.
Per tant tenim en total 8 camins que comencen **Xa** i, com ja hem dit, n'hi haurà també 8, simètrics dels anteriors, que començaran **Xc**. I, doncs, hi ha 16 camins que compleixen l'enunciat.

Passa $P = 16$ *al problema 8*

---

2. Solució: 405.

12 pentàgons i 20 hexàgons separats tenen en total $12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$ arestes però com que en una pilota de futbol cada aresta pertany a dos polígons el nombre d'arestes serà 90. La longitud total en serà $90 \times 4,5 = 405$ cm.

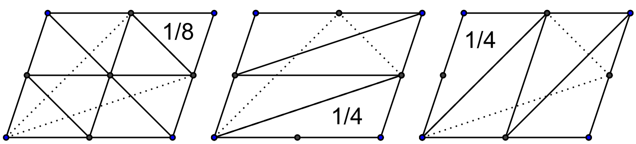
3. Solució: **No es pot fer**.

Les proporcions de xarop en cada got són de $\frac{50}{250}$ i $\frac{60}{250}$. Si en Biel passa x ml del seu got al got de l'Anna, com que hem de suposar que la barreja s'ha fet uniformement, d'aquests en seran de xarop $\frac{60x}{250}$. Per tant les noves proporcions seran $\dfrac{50+\frac{60x}{250}}{250+x}$ i $\dfrac{60-\frac{60x}{250}}{250-x}$. Si es resol l'equació que resulta d'igualar aquestes dues proporcions surt $x = \frac{-125}{6}$, que evidentment no escau a l'enunciat, i $x = 250$, que representaria que no es passa "una part del contingut" sinó "tot el contingut" i aleshores no es podria parlar de si s'han igualat les proporcions de xarop en els dos gots. Per tant en Biel no pot fer el que diu.

Del problema 5 passa $A = 87$

4. Solució: **232**.

Si raoneu sobre les figures següents veureu que el triangle petit de dalt a la dreta que no està acolorit té com a àrea $\frac{1}{8}$ de l'àrea del paral·lelogram (podeu veure-hi 8 triangles iguals) i que l'àrea de cadascun dels altres dos triangles no acolorits és $\frac{1}{4}$ de l'àrea del paral·lelogram.



Per tant es pot observar que l'area del triangle acolorit és igual a $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ de l'àrea del paral·lelogram. Així doncs si M és l'àrea del paral·lelogram, $87 = \frac{3}{8}M$ i d'aquí resulta $M = 232$.

Aquest valor $M = 232$ *passa al problema 9*

Colom de la pau. Solucions

5. Solució: **87**.

Com que el triangle gran de la figura té 16 unitats d'àrea, cada triangle menut serà d'1 unitat d'àrea.
Analitzem ara quins són els 27 triangles equilàters de la figura.
• El triangle gran; àrea 16.
• Triangles que tenen per base 3 vegades el costat d'un triangle menut. N'hi ha 3; àrea de cada un, 9 unitats d'àrea; suma 27.
• Triangles que tenen per base 2 vegades el costat d'un triangle menut. N'hi ha 7; 6 situats com el gran i un altre "amb la punxa cap avall". Àrea de cada un, 4 unitats d'àrea; suma de les àrees de tots, 28.
• Triangles menuts. N'hi ha 16; suma de les àrees, 16.
Podeu veure que efectivament hem comptat 27 triangles. Suma de totes les àrees: $16 + 27 + 28 + 16 = 87$.

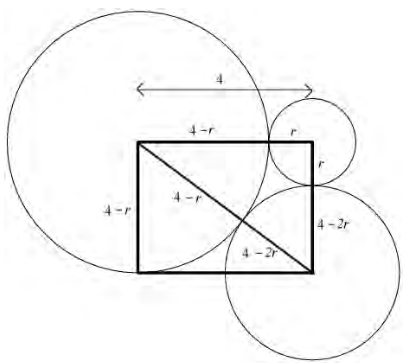
Passa $A = 87$ *al problema 4.*

6. Solució: **76**.

El nombre $6^7 = 2^7 \cdot 3^7$ té $8 \cdot 8 = 64$ divisors. El nombre $8^9 = 2^{27}$ té 28 divisors. Els divisors comuns són els del màxim comú divisor de 6^7 i 8^9, que és 2^7 i té 8 divisors. El nombre de divisors comuns de 6^7 i 8^9 és doncs $64 + 28 - 8 = 84$, però com que no és aquesta la pregunta sinó quins són els divisors d'un nombre o de l'altre però **no** de tots dos alhora, la resposta és $84 - 8 = 76$.

7. Solució: **1 unitat**.

El punt de tangència de dos cercles pertany sempre a la línia dels centres i, doncs, el punt de tangència dels dos cercles grans pertany a la diagonal del rectangle.
Aleshores, si designem amb r el radi del cercle menut, com que el costat gran del rectangle és 4, el radi del cercle gran serà $4-r$. Com que $4-r$ també és el costat petit del rectangle, veiem que el radi del cercle mitjà és $4 - 2r$.



En el triangle rectangle determinat per la diagonal i dos costats del rectangle la hipotenusa és $4-r+4-2r = 8-3r$, un catet és 4 i l'altre catet és $4-2r+r = 4-r$. Si apliquem el Teorema de Pitàgores tindrem $4^2+(4-r)^2 = (8-3r)^2$. Si resolem aquesta equació obtenim $r = 4$ (solució no vàlida per al problema) i $r = 1$.

Del problema 1 passa $P = 16$

8. Solució: **1440**.

Si indiquem com A el nombre de maons que posa el primer paleta en una hora, i com a B els que posa el segon, l'enunciat ens diu que $9A = 10B = 5(A + B - 16)$. Si resolem el sistema d'equacions que acabem d'indicar, resulta $A = 160$, $B = 144$ i, per tant el nombre de maons que confegeixen la paret és $9A = 10B = 1440$.

El valor N *= 1440 passa al problema 9.*

Solucions als reptes finals

Dels problemes 4 i 8 passen $M = 232$ *i* $N = 1440$

9. Solució: **7**.

Hem d'estudiar la posició en el triangle numèric adjunta del nombre $M+N = 1672$.

Els nombres d'elements de les files són 3, 5, 7, 9, ... Sabem que la suma dels nombres imparells és $1+3+5+7+\cdots$ és un quadrat perfecte.

Ara bé, com que no tenim cap fila amb un sol nombre, des de la primera fila fins a la fila n-sima de la disposició numèrica de la figura hi haurà un total de nombres que serà un quadrat perfecte menys 1 i, a més, com que hem començat amb el 0, resulta que el darrer nombre de cada fila serà un quadrat perfecte menys 2.

El primer quadrat perfecte que trobem superior a 1672 és $41^2 = 1681$; per tant la fila del 1672 acabarà amb el nombre 1679 i el 1672 tindrà 7 nombres a la seva dreta.

---

10. Solució: **750**.

A partir de l'estimació $2^{10} = 1000 = 10^3$ com que $2^{1000000} = (2^{10})^{100000}$ en Ramon diria que el nombre que ha d'escriure és "com si fos" $(10^3)^{100000} = 10^{300000}$, que té 300001 xifres.

Si posa 4 xifres per cm el nombre s'allargarà $\dfrac{300001}{4}$ cm i, per tant $\dfrac{300001}{400}$ m.

El valor arrodonit als metres és de 750 m.

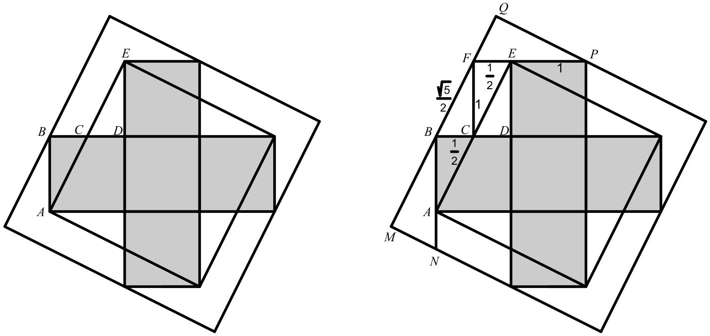
Solucions als reptes voluntaris

11. Solució: **0**.

Anem construint la successió condició a condició:
$a, b, a+b, ...$
$a, b, a+b, 2a+b, ...$
$a, b, a+b, 2a+b, 2a+2b, ...$
$a, b, a+b, 2a+b, 2a+2b, 3a+3b, ...$
$a, b, a+b, 2a+b, 2a+2b, 3a+3b, 5a+4b, 7a+6b, ...$
Si el setè terme és igual al vuitè, $5a+4b = 7a+6b$ i d'aquí en resulta $a = -b$ i, doncs, $a+b = 0$ i per tant el sisè terme és $3a+3b = 3(a+b) = 0$.

12. Solució: $\dfrac{49}{5}$.

El triangle ABC i el triangle EDC són iguals (son triangles rectangles amb un angle igual i el catet gran també igual, de longitud 1). Per tant el punt C és el punt mitjà de BD, el catet petit dels tiangles indicats té una longitud de $\frac{1}{2}$ i el teorema de Pitàgores ens diu que la hipotenusa n'és $\frac{\sqrt{5}}{2}$



Si ara perllonguem els segments com es veu a la segona figura observem dos triangles iguals als anteriors, FCB i CFE i, a més, es dibuixen els triangles rectangles BMN i PQF que són semblants als anteriors.

Com que la longitud de la hipotenusa d'aquests triangles rectangles és $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ i la dels altres és $\frac{\sqrt{5}}{2}$, la raó de semblança és $\frac{3}{\sqrt{5}}$ i les longituds dels catets en seran $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ i $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Això ens permet concloure que la longitud del costat del quadrat gran serà $\frac{3}{2\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$ i, per tant, l'àrea demanada és $\dfrac{49}{5}$.

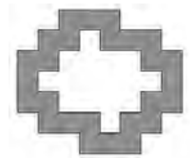
Una solució alternativa es pot trobar amb mètodes de la geometria analítica. Si fem que els vèrtexs del quadrat central de la creu siguin $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ i $(0,1)$ podrem calcular: $\overline{AE}=\sqrt{5}$, l'equació d'AE, $y=2x+2$ i, per perpendicularitat, la de l'altre costat del quadrat que passa per A, que és $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.
Fem les paral·leles a $y=2x+2$ que passa per $(-1,1)$ i a $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ que passa per $(0,-1)$ i la seva intersecció ens dóna un vèrtex del quadrat exterior, $(-\frac{8}{5},-\frac{1}{5})$. De manera semblant en podrem trobar un altre vèrtex, que és $(\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$. I ja podem calcular el costat del quadrat que interessa, que és $\sqrt{\dfrac{49}{5}}$, i obtenim de seguida l'àrea demanada.

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març de 2011

Problemes de la branca d'olivera

1. En la figura adjunta, tots els angles són angles rectes i els costats tenen tots una longitud d'una unitat o bé de 2 unitats o bé de 3 unitats. Quina és, en unitats quadrades, l'àrea de la regió acolorida?



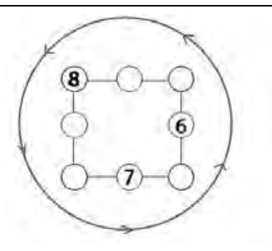
La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 8 com a nombre P.

2. Un joc de dòmino té figures geomètriques,

en comptes dels punts que hi ha en el joc de dòmino original. Del conjunt de les 28 fitxes d'aquest joc,

la Maria n'ha fet servir nou, en cap de les quals no apareix el rombe fosc, i les ha situat en forma de creu, com es veu a la figura de la dreta.
La Maria ha posat les fitxes amb l'única condició que siguin iguals els dibuixos de les caselles que es toquen de fitxes diferents. (i això ho ha fet tant si se'n toquen dues com més de dues.)
Una vegada situades les fitxes, en Norbert n'ha tombat quatre (respectant la condició de coincidència de dibuixos en caselles que es toquen). Quina figura hi ha a sota de l'interrogant?

3. La Joaneta vol posar els nombres enters de l'1 al 8, sense repetir-ne cap, als cercles de la figura, de manera que la suma dels nombres en cada costat del quadrat sigui 13. En Joan li ha dit, *"apa! jo ja t'he posat el 6, el 7 i el 8. Ho podràs acabar?"*.
Estudieu si la Joaneta podrà acabar de posar els nombres de l'1 al 5 o no.



Per tal de trobar la resposta numèrica del problema 4 cal un nombre M que passa del problema 5.

4. Quatre persones es reparteixen així una certa quantitat d'euros:
- El primer rep la meitat dels diners més M €.
- Després, el segon rep la meitat del que queda més M €.
- Després, el tercer rep la meitat del que queda més M €.
- Aleshores el quart rep la meitat del que quedava i, vist que després ja només quedaven els últims M €, també se'ls emporta el quart.

I així, és clar, ja s'han repartit exactament tots els diners. Quants euros s'han repartit?

Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor A la resposta numèrica d'aquest problema.

Problemes del colom de la pau

5. Demà és l'aniversari de l'oncle Sam, que farà 101 anys, i diu: *"Mireu, demà la meva edat passarà de ser nombre quadrat perfecte a ser un nombre primer."* Tot seguit us pregunta: *"Quantes vegades ja m'ha passat això mateix, anteriorment, al llarg de la meva vida?"*

La resposta s'ha de passar al problema 4, com a M.

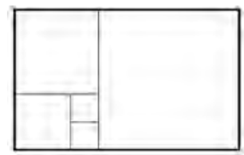
6. L'Albert va treballar un cert nombre de dies. La quantitat d'euros que va guanyar diàriament (cada dia la mateixa) coincideix amb el nombre de dies que va treballar. La Berta va treballar dos dies menys que l'Albert però, en canvi, va guanyar 2 € més per dia que l'Albert.
- Qui va guanyar més diners?
- Quina va ser la diferència de guanys entre els dos?

7. La Sara té un gos-robot situat al punt (4,0) d'un sistema de coordenades mirant cap a l'Est (eixos perpendiculars, l'eix de les x va d'Oest negatius- cap a Est positius-) i l'ha programat amb les instruccions següents:
- 1r moviment: avança una unitat cap a l'Est i ves al punt (5,0)
- Moviments posteriors: si estàs situat al punt (x,y), aleshores fes el residu de dividir $x - y$ per 4 i mou-te així:
  - Si és 0 o 1 gira 90 cap a l'esquerra i avança una unitat
  - Si és 2 o 3 gira 90 cap a la dreta i avança una unitat

A quin punt arribarà el gos-robot just després del seu 50è moviment?

Per al problema 8 es necessita un nombre P, que passa del problema 1.

8. La figura de la dreta està formada per cinc quadrats. Quina és, en cm^2, l'àrea de la figura si el perímetre exterior (marcat més gruixut) és de P cm?



Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor B la resposta d'aquest problema, sense unitats.

Reptes finals

Per resoldre aquest problema cal conèixer nombres A i B que passen dels problemes 4 i 8.

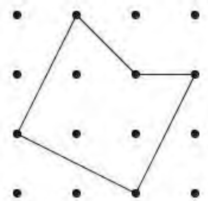
9. Un cotxe ha fet un viatge, al llarg del qual ha circulat A km per una carretera a una velocitat mitjana de 60 km/h i B km per autopista a una velocitat mitjana de 100 km/h. Per tornar ha de fer un camí més llarg, per carretera; triga 3 hores i fa el viatge a la mateixa velocitat mitjana que la de l'anada comptant tot el camí. Quants quilòmetres ha fet a la tornada?

10. La figura següent (que no està pas dibuixada "a escala") mostra un rectangle gran que s'ha dividit en quatre rectangles més petits per línies paral·leles als costats. Coneixes les àrees de tres dels rectangles petits. Quina és l'àrea del rectangle marcat amb un interrogant?

Reptes voluntaris

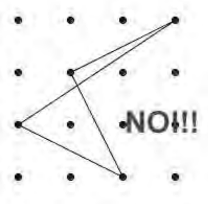
11. Volem escollir set nombres enters positius diferents que tinguin per mitjana 7 i per mediana també 7. Quin és el valor màxim que pot tenir el nombre més gran que escollim?

12. La figura mostra un pentàgon que hem fet amb els vèrtexs en punts dun geoplà que només té els punts que pots veure a la figura. Adoneu-vos que cap dels segments que formen els costats del pentàgon no conté cap altre punt del geoplà que no sigui vèrtex del polígon.



Quin és el màxim nombre de costats que pot tenir un polígon amb vèrtexs en els punts del geoplà i que compleixi també la condició que acabem de dir?

Nota: podeu considerar polígons convexos o còncaus (com el de la figura anterior) però **NO** els que de vegades sen diuen polígons estrellats (que potser vosaltres no penseu que siguin un polígon)



Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març 2011

Participació i centres destacats

Aquesta edició dels **Problemes a l'esprint** celebrada el dia 23 de març de 2011 va representar un récord de participació. Es van inscriure 90 equips, de 76 centres, d'Andorra, Catalunya, el País Valencià i les illes Balears, cosa que representa més de 1700 alumnes.
Van enviar totes les respostes correctes un total de 26 equips.
Gràcies a tothom que va participar o va impulsar la participació!

Centres més destacats

Els **equips guanyadors** de l'activitat, declarats ex aequo, són els del centres

- Col·legi Cor de Maria, de Valls (Alt Camp) i
- Institut Samuel Gili i Gaya, de Lleida (Segrià)

que van tenir encert ple, al primer intent, amb un temps de concurs aproximat de tres quarts d'hora. També van enviar la resposta correcta als reptes suplementaris, fora de concurs.

Pòdium de l'activitat, també ex-aequo

- IES Vicent Castell Domènech, de Castelló de la Plana (Plana Alta) i
- Institut Santa Eugènia, de Girona (Gironès)

que van enviar totes les respostes correctes, al primer intent, amb un temps de concurs inferior a una hora i, a més, van respondre correctament els dos reptes suplementaris.

Altres equips que van encertar totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)
(s'indiquen amb (*) els centres que han enviat les respostes als reptes suplementaris, fora de concurs)

En un temps inferior a una hora i mitja:

IES Bellaguarda d'Altea (Marina Baixa) (*)
Col·legi Jardí de Granollers (Vallès Oriental) (*)
Institut El Cairat d'Esparreguera (Baix Llobregat)
i Institut de Sant Quirze del Vallès (Vallès Occidental) (*)

La llista d'equips amb totes les respostes correctes es completa amb:

Institut Badalona VII de Badalona (Barcelonès) (*)
Col·legi Calassanç, de Barcelona (Barcelonès)
IES Violant de Casalduch de Benicàssim (Plana Alta) (*)
Institut Puig Cargol de Calonge-Sant Antoni (Baix Empordà) (*)
Institut de Corbera de Llobregat (Baix Llobregat)
Institut de Deltebre (Baix Ebre)
IES número 3 de Dénia (Marina Alta) (*)
Institut Mediterrània d'El Masnou (Maresme)
Institut Jaume Vicens Vives de Girona (Gironès) (*)
Institut Celestí Bellera de Granollers (Vallès Occidental) (*)
IES Pau Casesnoves d'Inca (Mallorca septentrional) (*)
Institut el Pedró de L'Escala (Alt Empordà)
Institut Ramon Coll i Rodès de Lloret de Mar (La Selva)
Institut Pius Font i Quer de Manresa (Bages) (*)
Institut Montserrat Miró i Vilà de Montcada (Vallès Occidental)
Col·legi Regina Carmeli de Rubí (Vallès Occidental) (*)
Institut Jonqueres de Sabadell (Vallès Occidental) (*)
Institut Sabadell de Sabadell (Vallès Occidental) (*)

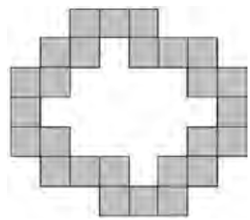
Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març de 2011

Branca d'olivera. Solucions

1. Solució: **26**.

Podeu veure a la figura que la regió queda descomposta en 26 quadrats unitaris, de costat 1 unitat i àrea 1 unitat cuadrada.



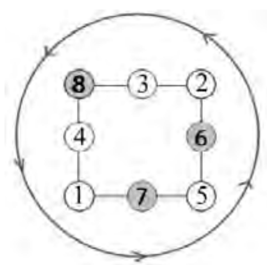
Passa $P = 26$ *al problema 8*

2. Solució: **Un triangle**.

Com que no hi ha cap rombe, com a peça **1·2** s'hi podrien posar, a priori, **segment·segment** o bé **segment·triangle**. La primera d'aquestes dues possiblitats no pot pas ser perquè així a **?**· **5** hi hauria d'anar **segment·triangle** i aquest triangle no concordaria amb un pentàgon que hi ha situat a la fitxa de la dreta. En canvi, és possible que a **1·2** hi vagi la peça **segment·triangle** perquè aleshores tindrem que **?·5** = **triangle·pentàgon**,
3·4 = **quadrat·triangle**
i **6·7** = **triangle·triangle**.

3. Solució: **84175623**.

En els dos costats que conflueixen en el vèrtex on hi ha el 8 les dues xifres de cada costat han de sumar 5; per tant seran necessàriament els dos conjunts $\{3, 2\}$ i $\{4, 1\}$. Només queda el 5 que haurà d'anar, doncs, al vèrtex de baix a la dreta, a tocar amb el 6 i amb el 7. I a partir d'aquí ja és ràpid col·locar els altres nombres.



Del problema 5 passa $M = 4$

4. Solució: **120**.

La quarta persona rep "la meitat del que quedava més els 4 € últims que quedaven". Per tant, com que després de treure'n la meitat en queda una altra meitat, a la quarta persona, després d'haver donat diners al tercer, li arribaven 8 €.
Quan treia diners la tercera persona, doncs, abans de donar-li els "4 € més" quedaven $8 + 4 = 12$ € i això era la meitat del que li havia arribat a ell: serien 24 € .
Raonant de la mateixa manera, quan treia diners la segona persona, abans dels "4 € més" quedaven $24 + 4 = 28$ €, la meitat de la quantitat que li havia arribat a ell: serien 56 €.
Finalment, mentre treia diners el primer abans dels "4 € més" quedaven $56 + 4 = 60$ € és a dir que al principi hi havia el doble d'això, 120 €.

Passa $A = 120$ al problema 9

Colom de la pau. Solucions

5. Solució: **4**.

Els quadrats perfectes més petits que 100 (atenció! que l'enunciat diu "anteriorment") són 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. D'aquests els que compleixen l'enunciat són 1, 4, 16 i 36 perquè 2, 5, 17 i 37 són nombres primers. Els altres no ho compleixen perquè 10, 26, 50, 65 i 82 no són pas nombres primers.

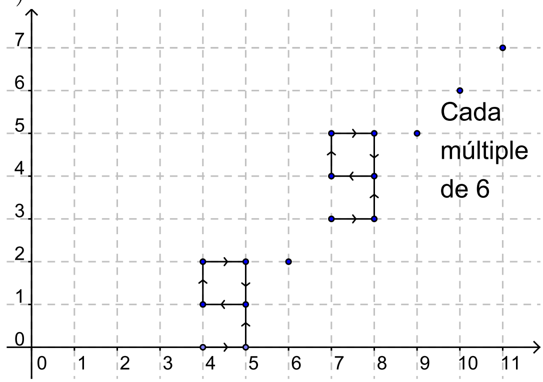
Passa $M = 4$ al problema 4.

6. Solució: **Guanya més l'Albert; 4€.**.

Un bon exemple de l'ús fonamental de la notació algebraica. Si indiquem com n el nombre de dies que ha treballat l'Albert, com que segons l'enunciat guanya n € per dia, els diners totals que ha de cobrar l'Albert pel seu treball de tots els dies són $n \cdot n = n^2$ €.
En canvi la Berta guanya per dia $n + 2$ € però treballa $n - 2$ dies; els diners totals que li corresponen són $(n - 2) \cdot (n + 2)$ i, per una fórmula fonamental, això és igual a $n^2 - 4$ €, és a dir 4 € menys que el total de l'Albert.

7. Solució: **Punt (13,9)**.

Si analitzem un per un els sis primers moviments veurem que es descriu un itinerari com el que podeu veure a la figura següent, que porta del punt $(4,0)$ al punt $(5,1)$.



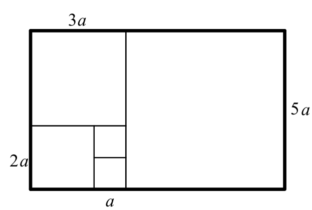
Observeu ara que en el punt $(5,1)$ es compleix que $5-1=4$ i per tant el robot girarà a l'esquerra, avançarà cap a l'est i "copiarà" l'itinerari anterior. Així després de 12 moviments el robot arribarà al punt (6,2). Torna a ser $6-2=4$ i es tornarà a repetir el circuit. I així successivament, cada 6 moviments arribarà a un punt de la forma $(n, n-4)$ i com que sempre $n-(n-4)=4$ s'anirà repetint el cicle de moviments. A la figura teniu dibuixat el que comença en $(7,3)$.

Així doncs després del movimet 48 el robot serà al punt $(12,8)$, en el moviment 49 girarà a l'esquerra i avançarà fins al (13,8) i en el 50è movient girarà a l'esquerra i avançarà fins al (13,9).

Del problema 1 passa $P=26$

8. Solució: **40**.

Si indiquem com a el costat dels quadrats més petits que apareixen a la figura, els costats dels altres quadrats seran $2a$, $3a$ i $5a$. El perímetre del rectangle és $26a = 26$ cm i, per tant $a=1$ cm. Els costats del rectangle són $8a$ i $5a$ i per tant l'àrea serà $8\cdot 5 = 40$ cm^2.



El valor $B = 40$ passa al problema 9.

Solucions als reptes finals

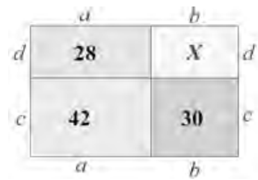
Dels problemes 4 i 8 passen $A = 120$ *i* $B = 40$

9. Solució: **200**.

Per als 120 km de l'anada a mitjana de 60 km/h ha trigat 2 hores. Per als 40 km a mitjana de 100 km/h, és a dir 100 km cada 60 min, una proporcionalitat ens diu que haurà trigat 24 minuts. En total, doncs en 144 minuts ha fet 160 km i si a la tornada manté aquesta mateixa velocitat mitjana podem fer una altra proporcionalitat i veurem que en 3 hores (180 min) fa 200 km.

10. Solució: **20**.

Amb les lletres que teniu a la figura de la dreta, mirant les àrees dels rectangles petits, us podeu adonar que $a \cdot d \cdot b \cdot c = 28 \cdot 30$ i que $a \cdot c \cdot b \cdot d = 42 \cdot X$. Com que les dues expressions anteriors són iguals, se'n dedueix que $X = \dfrac{28 \cdot 30}{42} = 20$.



Tot i que l'enunciat no ho deia, si algú s'ha imaginat que calia que els costats fossin nombres enters, també es pot arribar a una solució i així comprovem que tot i que X té un valor fix, hi ha diferents mesures dels costats que compleixen l'enunciat. a i c han de ser divisors de 42 amb $a \cdot c = 42$, a ha de ser divisor de 28 i c ha de ser divisor de 30. Això ho compleixen l $a = 7, c = 6$ que ens dóna $b = 5, d = 4, X = 20$ i també $a = 14, c = 3$ d'on $b = 10$, $d = 2$, $X = 20$. Amb nombres enters hi ha aquestes dues possibilitats; si no imposem aquesta condició n'hi ha infinites, però per a totes elles $X = 20$

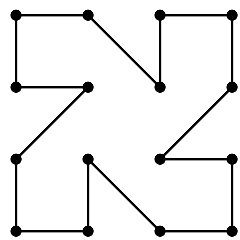
Solucions als reptes voluntaris

11. Solució: **19**.

La llista ordenada dels set nombres serà $\{a, b, c, 7, e, f, g\}$ perquè la mediana sigui 7. Si busquem el valor més gran per a g de manera que la mitjana sigui 7, aleshores a, b i c hauran de tenir el valor més petit possible. Com que han de ser enters positius diferents aquests valors seran $a = 1$, $b = 2$ i $c = 3$. També a e i a f els haurem de donar els valor més petits possible, que seran $e = 8$, $f = 9$ Com que si la mitjana és 7 la suma de tots els nombres del conjunt ha de ser 49, tindrem $1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 + g = 49$ i d'ací $g = 19$.

12. Solució: **16**.

La figura mostra un polígon de 16 costats (i 16 vèrtexs, és clar) que compleix la condició de l'enunciat, i com que cap punt del geopla pot ser alhora dues vegades vèrtex del polígon que busquem, 16 és el màxim nombre de vèrtexs que podem trobar per al nostre polígon.

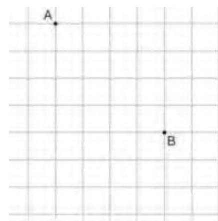


Problemes a l'esprint

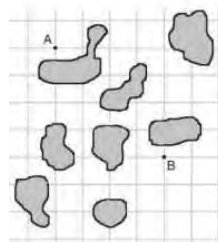
Equips d'alumnes del cicle superior de primària. Abril de 2011

Problemes de la branca d'olivera

1. La Nahia i en Pau formen parella per participar en un concurs de programació de robots, que s'han de fer circular per una quadrícula des del punt **A** fins al punt **B**.



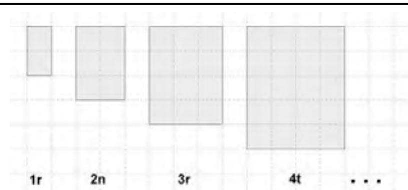
Però no és tan fàcil com això! En el moment del concurs apareixen uns llacs per on no pot passar el robot.
Si cada quadradet fa 1 unitat de costat, quina longitud té el camí més curt que poden aconseguir en Pau i la Nahia per fer anar el robot des de A fins a B sense passar pels llacs?



La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 8

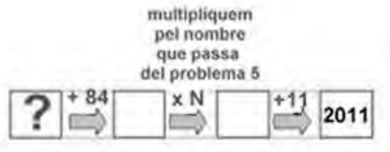
2. De tots els nombres de tres xifres (és a dir del 100 al 999) que les seves xifres sumen 8, la Carme ha triat el més gran i en David ha triat el més menut. Quant sumen el nombre de la Carme més el d'en David?

3. Si continuem, ordenadament, la col·lecció de rectangles de la figura de la dreta, quants quadradets tindrà el 10è rectangle?



Per tal de trobar la resposta del problema 4 cal un nombre que passa del problema 5.

4. Quin nombre ha d'aparèixer al requadre on hi ha l'interrogant si hem fet correctament totes les operacions indicades per les fletxes i hem arribat al 2011?



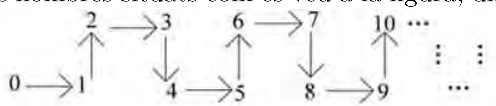
Heu de passar al primer repte (problema 9) la resposta d'aquest problema.

Problemes del colom de la pau

5. En Joan va posant en una filera, ordenadament, 1 bola de color vermell, 2 de color blau, 3 de color vermell, 4 de color blau, 5 de color vermell, 6 de color blau i així successivament.
Daquesta filera la Joana agafa les deu boles que han quedat en els llocs 10è, 20è, 30è, 40è, 50è, 60è, 70è, 80è, 90è i 100è. Quantes boles ha agafat la Joana de color vermell?

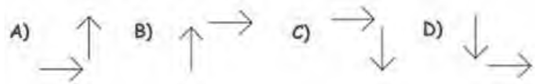
La resposta s'ha de passar al problema 4.

6. Tenim uns quants nombres situats com es veu a la figura, units amb fletxes.

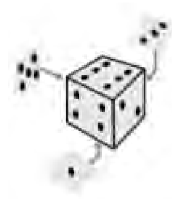


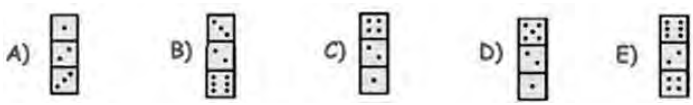
Si continuem posant ordenadament els nombres naturals seguint sempre la mateixa estructura de fletxes, quines fletxes van del nombre 2010 al 2012 passant pel 2011?

Heu de triar la resposta entre les següents:



7. Si agafeu un dau veureu que la suma de les cares oposades és de 7 punts. En Tomàs ha agafat tres daus iguals i els ha enganxat formant una columna. Les cares que han quedat enganxades una amb l'altra marquen el mateix número de punts. Quina de les imatges següents pot ser la que veurem en una cara de la columna de daus que ha fet en Tomàs?





Per resoldre aquest problema cal conèixer, un nombre que passa del problema 1.

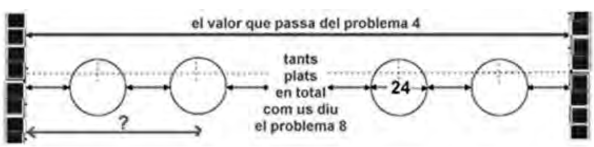
8. La Diana participa en un concurs i aconsegueix fer 144 punts. Per cada resposta encertada al primer intent li han donat 21 punts i per cada resposta encertada al segon intent ha obtingut tants punts com el número que us passen del problema 1. Quantes respostes ha encertat en total, si algunes les ha respost al primer intent i unes altres al segon?

La resposta d'aquest problema l'heu de passar al primer repte (problema 9).

Reptes finals

Per trobar la resposta exacta d'aquest problema cal conèixer nombres que passen dels problemes 4 i 8.

9. Per decorar una paret que fa tants cm com el valor que passa del problema 4, l'Artur ha comprat tants plats de 24 cm de diàmetre com el nombre que passa del problema 8. Vol col·locar-los de manera que la distància entre dos plats consecutius sigui igual a la distància entre el primer plat i la paret del davant i entre l'últim plat i la paret del darrere (tal com es mostra en la figura).



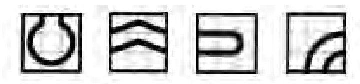
A quina distància de la paret més propera es troba el centre del segon plat?

10. La figura mostra una suma de dos nombres de quatre xifres que dóna com a resultat un nombre de cinc xifres. Heu de substituir lletres diferents per xifres diferents i lletres iguals per xifres iguals perquè la suma sigui correcta. Si ho aconseguiu, quin és el resultat de la suma?

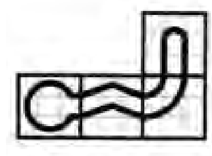
$$\begin{array}{r} B\ D\ C\ E \\ +\ B\ D\ A\ E \\ \hline A\ E\ C\ B\ E \end{array}$$

Reptes voluntaris

11. La Roser té aquestes quatre peces diferents (una de cada):



Les ha pogut col·locar de manera que formin el circuit tancat que veieu en el dibuix de la dreta. Quants circuits tancats, diferents, pot muntar la Roser?



Nota: Per fer els circuits, la Roser pot utilitzar només 2 peces, només 3 peces o bé totes 4. Cada vegada que fa un nou circuit, primer desfà el que ja ha aconseguit i per tant torna a disposar de les quatre peces per fer un nou intent. Cada peça, de manera individual, la pot girar a l'hora de fer la construcció però els circuits, un cop acabats, es considera que són els mateixos, tot i que estiguin girats sobre la taula.

12. L'Anna, la Berta, en Carles i en Daniel han anat a pescar.
Entre tota la colla han pescat 11 peixos.
Cada un dels quatre membres del grup ha pescat algun peix però tots han aconseguit un nombre diferent de peixos. L'Anna és la persona que ha pescat més peixos i la Berta la que n'ha pescat menys.
Quants peixos han pescat entre els dos nois?

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes del cicle superior de primària. Abril de 2011

Participació i centres destacats

En aquesta edició dels *Problemes a l'esprint* van participar 22 equips, de 20 centres, de Catalunya i les illes Balears, que van indicar un total de 441 alumnes, que es van concentrar, van pensar com es farien els problemes i van comentar resultats i procediments amb companys i companyes.
Van enviar totes les respostes correctes un total de 18 equips. Un rècord d'encert, molt bona feina!
Gràcies a tothom que va participar o va impulsar la participació!

Centres més destacats

L'**equip guanyador** de l'activitat, és el del centre

- Escola Pardinyes, de Lleida (Segrià)

que va tenir encert ple, al primer intent, amb un temps extraordinari, inferior a la mitja hora de treball.

Pòdium de l'activitat, dos equips declarats ex-aequo

- Escola Torres Amat de Sallent (Bages) i
- Escola Sadako, de Barcelona (Barcelonès)

que van tenir encert ple amb un temps de concurs inferior a tres quarts d'hora (Equip 2 de l'Escola Torres Amat, al primer intent; Escola Sadako amb uns intents suplementaris en el grup de problemes del colom de la pau).

Altres equips que van encertar totes les respostes

Els centres que tot seguit s'indiquen van enviar correctament totes les respostes i, a més, les respostes correctes als dos reptes suplementaris, cosa que volem destacar encara que es plantegessin fora de concurs, són els següents (per ordre de temps de concurs).

Aula Escola Europea, Barcelona
CEIP Marian Aguiló, Palma de Mallorca
Institut-Escola Ramona Calvet, Castellterçol
Escola Joan Roca - Meridiana, Barcelona
Escola Jaume I, Llívia
Escola Municipal La Sínia, Cerdanyola del Vallès

La llista d'equips que han enviat el formulari amb totes les respostes correctes es completa amb els següents (indicats per ordre de temps de concurs): Joan Pelegri, Barcelona
Col·legi Regina Carmeli, Rubí
FEDAC Sagrat Cor de Jesús, Súria
Escola Francesc Burniol, Argentona
CEIP Montserrat, Esparreguera
Escola Torres Amat, Sallent (equip 1)
Escola Les Planes, La Llagosta (equip 1)
Bell-lloc del Pla, Girona
Escola Les Planes, La Llagosta (equip 2)

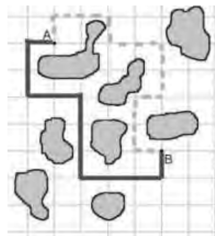
Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes del cilce superior de primària. Abril de 2011

Branca d'olivera. Solucions

1. Solució: **12**.

Podeu veure a la figura que es poden aconseguir camins de longitud 12.
Els camins de longitud més curta possible (si no hi hagués llacs) serien de longitud 8. Ara bé, amb els llacs podeu veure que al menys s'ha de desviar dues vegades, i cada desviació afegeix com a mínim 2 unitats a la distància que cal recórrer.)



Passa el número 12 al problema 8

2. Solució: **907**.

El nombre més gran de tres xifres que les seves xifres sumen 8 és el 800 (hem de mirar que la primera xifra sigui com més gran millor). El nombre més petit que les seves xifres sumen 8 és el 107 (primera i segona xifra tan petites com hem pogut). La suma d'aquests dos nombres és 907.

3. Solució: **110**.

Podem veure que el primer rectangle té mesures 1×2; el segon és de 2×3; el tercer de 3×4. Si continuem amb aquesta cadència el desè rectangle tindrà per mesures 10×11 i, doncs, estarà format per 110 quadradets.

Del problema 5 passa el número 4.

4. Solució: **416**.

Si fem els càlculs "a la inversa" veurem que a la penúltima casella hi correspon el 2000 (restem $2011 - 2000$ i així obtenim el número al qual sumant-li 11 obtenim 2000); a la segona casella per l'esquerra hi ha d'anar el 500 (dividim 2000 per 4 i trobem el número que multiplicat per 4 dóna 2000); finalment a la casella inicial hi va el 416 (ho veiem fent $500 - 84$ i així obtenim el número que sumant-li 84 dóna 500.)

Passem el valor 416 al problema 9

Colom de la pau. Solucions

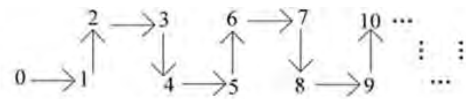
5. Solució: **4**.

Si anem sumant 1, 1+2 = 3, 1+2+3 = 6, 1+2+3+4 = 10 i, successivament, sumem 5, 6, 7, 8, 9, ... trobarem 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, ... i aquests valor sindiquen la darrera bola de cada grup del mateix color. La 1a bola és vermella; la 2a i la 3a són color blau; dels llocs 4t al 6è de color vermell; dels llocs 7è al 10è són de color blau; i així successivament. Si anem mirant les boles que ens interessen trobem que són vermelles la de lloc 40è (del 37è al 45è són de color vermell), la de lloc 60è (ho són del 56è al 66è lloc) i les del llocs 80è i 90è (del 79è al 91è de color vermell).

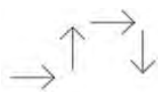
La resposta, el número 4, es passa al problema 5.

6. Solució: **C)**.

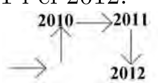
A partir de l'esquema



veiem que la manera que posem les fletxes fa que es repeteixi la sanefa cada 4 fletxes.

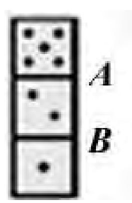


Aleshores dividim 2010 per 4 i veiem que dóna 502 grups sencers de 4 fletxes i en fan falta dues més per arribar al 2010. I així ja podem saber com quedaran posats el 2010, el 2011 i el 2012.



7. Solució: **D)**.

Anomenarem A la cara comuna al dau de dalt i al dau del mig i B la cara comuna al dau del mig i el dau de baix. Noteu que els dos valors a A i a B han de sumar 7. De les cinc posicions que es mostren a les opcions de resposta, l'única possible d'acord amb l'enunciat és la **D)** posant a la cara A un 4 o un 3 i l'altre d'aquests valors anirà a B.



Per a les les altres propostes de solució, si examinem els diferents valors que, a priori, podrien anar a A trobarem que en cap cas el valor que hauria d'anar a B concorda amb l'enunciat.
Per exemple per a l'esquema **A)** és clar que a A no hi pot anar ni 1 ni 2 perquè els veiem en un altre lloc dels dos daus superiors; el 3 tampoc perquè aleshores a B hi aniria el 4, però això no concorda amb el dau inferior on ja sabem que el 4 va a la cara del darrera; el 5 i el 6 tampoc no poden anar a A perquè sabem que van en altres posicions dels dos daus superior o del mig. Semblantment raonaríem per als esquemes **B)**, **C)** i **E)**.

Del problema 1 passa el número 12

8. Solució: **9**.

Hem de trobar un múltiple de 21 (els punts obtinguts per respostes correctes al primer intent) que, si el restem de 144 doni un múltiple de 12 (punts per les respostes al segon intent).
Si ho anem provant veurem que això succeeix per a $21 \times 4 = 84$ perquè $144 - 84 = 60 = 12 \times 5$. És a dir, que haurà encertat 5 preguntes al primer intent i 4 al segon, en total $5 + 4 = 9$.
També trobaríem que $21 \times 7 = 144$, és a dir que hauria pogut encertar 7 preguntes, totes al primer intent, i tindria la puntuació demanada, però això no està d'acord amb l'enunciat que diu que "*ha respost algunes preguntes al primer intent i altres al segon.*"

El valor de la resposta, el 9, passa al problema 9.

Solucions als reptes finals

Dels problemes 4 i 8 passen 416 i 9; és a dir: 416 cm de paret a paret i 9 plats.

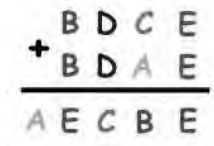
9. Solució: **76 cm**.

98 plats de 24 cm de diàmetre fan, entre tots, $24 \times 9 = 216$cm. Resten $416 - 216 = 200$ cm que corresponen a 10 distàncies iguals (1 de la paret al primer plat, 8 entre plats, 1 del darrer plat a l'altra paret). Per tant cada una d'aquestes distàncies serà de $200 \div 10 = 20$ cm. Des de la paret al centre del segon plat hi haurà una d'aquestes separacions, el diàmetre d'un plat, una altra separació i la meitat (és a dir el radi) d'un plat. En total $209 + 24 + 20 + 13 = 76$ cm.

---

10. Solució: **10450**.

Com que sumant dos nombres el més que en podem portar és 1, és segur que ha de ser $A = 1$. Si mirem l'última columna veurem que ha de ser $E = 0$ perquè no hi ha cap altra xifra que sumada amb ella mateixa resulti també ella mateixa com a resultat de la suma (ni que sigui portant-ne 1).



Si ara mirem la primera columna deduïm $B = 5$ perquè com a resultat de $B + B$ hem d'escriure 10; com que com a màxim cap a la columna de $B + B$ en portaríem 1 de la columna $D + D$, no pot ser $B = 4$ o més petit; ha de ser $B = 5$. Continuem: com que no en portem cap veiem que ha de ser $C + 1 = 5$ i, doncs, $C = 4$. Finalment com que, també sense portar-ne, ha de ser $D + D = 4$ resulta $D = 2$.

Solucions als reptes voluntaris

11. Solució: **13**.

Numerem les peces per a l'explicació com es veu a la figura.

Per la nota de l'enunciat podem imaginar que el circuit tancat que busquem comença amb la peça 1 i acaba amb la peça 3. Aleshores:

• Circuits amb dues peces només n'hi ha un (peces 1 i 3)

• Circuits amb tres peces n'hi ha qautre (dos amb les peces 1, 2 i 3 -dos perquè la peça 2 la posem posar de dues maneres- i semblantment dos amb 1, 4 i 3)

• Circuits amb totes quatre peces n'hi ha vuit. Amb les peces en l'ordre 1, 2, 4 i 3 n'hi ha quatre perquè podem posar cada una de les peces 2 i 4 de dues maneres i combinar-ho. Semblantment quatre possibilitats més amb les peces en l'ordre 1, 4, 2 i 3.

12. Solució: **5**.

Pel que diu l'enunciat, hem de buscar quatre nombres enters positius diferents que sumin 11. Provem $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; perquè sumin 11 hem d'augmentar 1 a un dels sumands. Només pot ser $1 + 2 + 3 + 5 = 11$. Per tant l'Anna n'ha pescat 5, la Berta 1 i entre els dos nois $2 + 3 = 5$.

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 1

Qüestions de 3 punts

1. En Pere escriu cada dia una lletra de la paraula **CANGURET**. Si comença a escriure un dimecres, quin dia de la setmana escriurà la darrera lletra?

A) Dilluns B) Dimarts C) Dimecres D) Dijous E) Divendres

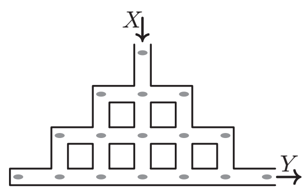
2. Un motociclista va recórrer una distància de 28 km en 30 minuts. A quina velocitat mitjana va anar?

A) 58 km/h B) 36 km/h C) 62 km/h D) 28 km/h E) 56 km/h

3. Hem tallat una rajola quadrada en dos trossos fent-hi un tall recte. Quina de les formes següents no pot ser una de les figures resultants?

A) Un quadrat
B) Un rectangle
C) Un triangle rectangle
D) Un pentàgon
E) Un triangle isòsceles

4. Hem de recórrer un laberint entrant per X i sortint per Y sense passar més d'un cop per la mateixa cruïlla. A cada cruïlla hi ha una pedreta tal com es veu en el dibuix. Quin és el màxim nombre de pedretes que podem agafar en recórrer el laberint?

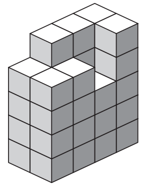


A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 11

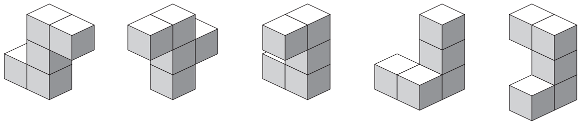
5. A Vilanotrès, les cases del costat dret del carrer tenen nombres senars. Però els habitants d'aquest poble no utilitzen la xifra 3 per a numerar les cases. Si la primera casa del costat dret d'un carrer té el número 1, quin serà el número de la quinzena casa en el mateix costat del carrer?

A) 29 B) 41 C) 43 D) 45 E) 47

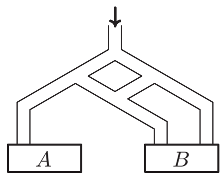
6. Quina de les peces següents necessiteu per a completar el paral·lelepípede de la figura de la dreta?



A) B) C) D) E)



7. El sistema de tubs del dibuix s'ha dissenyat de manera que en cada bifurcació el líquid que hi circula es reparteix en dues parts iguals. Si aboquem 1000 litres d'aigua pel tub de dalt, quants litres d'aigua cauran al dipòsit B?



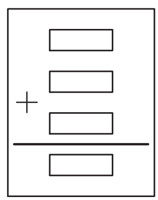
A) 800 L B) 750 L C) 666,67 L D) 660 L E) 500 L

8. La data 01-03-05 (1 de març de 2005) és formada per tres nombres senars consecutius en ordre creixent. Aquesta és la primera data del segle XXI que compleix aquesta condició. Incloent-hi aquesta data d'exemple, quantes dates expressades amb aquest format (dd-mm-aa) compleixen aquesta condició en el segle XXI?

A) 5 B) 6 C) 16 D) 13 E) 8

9. Trieu quatre números del rectangle de l'esquerra i col·loqueu-los en les caselles del de la dreta, de manera que la suma que s'hi representi sigui correcta. Quin número no heu triat?

	17	167
49	30	96



A) 17 B) 30 C) 49 D) 96 E) 167

10. La meva mixeta beu 60 ml de llet els dies que només passeja i pren el sol, però els dies que caça algun ratolí beu una tercera part més de llet. Les dues darreres setmanes ha caçat ratolins dia sí dia no. Quants ml de llet ha begut aquestes dues setmanes?

A) 840 ml B) 980 ml C) 1050 ml D) 1120 ml E) 1960 ml

Qüestions de 4 punts

11. L'Andreu va escriure les lletres de la paraula **KANGAROO** en una taula, una lletra per cel·la. Podia escriure la primera lletra en qualsevol cel·la. Després, havia d'escriure cada lletra en una casella que tingués, com a mínim, un punt en comú amb la cel·la on havia escrit la lletra anterior. Quina de les taules següents no pot ser la de l'Andreu?

A)

A	*O*	*G*	*A*
K	*N*	*O*	*R*

B)

G	*A*	*R*	*O*
N	*A*	*K*	*O*

C)

O	*R*	*A*	*N*
O	*K*	*A*	*G*

D)

A	*G*	*O*	*A*
K	*N*	*O*	*R*

E)

O	*O*	*N*	*G*
K	*A*	*R*	*A*

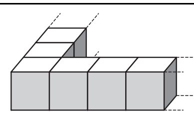
12. Considerem els nombres enters compresos entre 1000 i 10000 que es poden escriure utilitzant totes les xifres del número 2011, és a dir, utilitzant un 0, dos 1 i un 2. Si els ordenem de gran a petit, quina és la diferència entre els dos nombres contigus al 2011?

A) 890 B) 891 C) 900 D) 909 E) 990

13. Tenim quatre nombres positius a, b, c i d que compleixen $a < b < c < d$. Augmentem en una unitat un dels quatre nombres i, a continuació, els multipliquem. A quin dels quatre nombres li hem de sumar 1 per obtenir el resultat més petit?

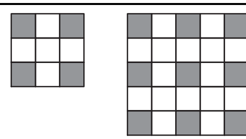
A) a B) b C) c D) d E) b o c

14. La Nina ha utilitzat 36 cubs idèntics per a construir una tanca de cubs al voltant i per fora d'una regió quadrada (una part es mostra en la figura). Quants cubs necessitarà per a omplir tota la regió?



A) 36 B) 49 C) 64 D) 81 E) 100

15. El terra d'una habitació quadrada s'ha fet amb lloses blanques i grises. La figura mostra un terra amb 4 lloses grises i un altre amb 9 lloses grises. Hi ha una llosa grisa en cada cantonada i totes les lloses que toquen una llosa grisa són blanques, seguint el patró de la figura. Quantes lloses blanques són necessàries per a una habitació amb 25 lloses grises?



A) 25 B) 39 C) 45 D) 56 E) 72

16. A l'hora de multiplicar un número per 301 en Pau va oblidar prémer la tecla del 0 a la calculadora, o sigui que va multiplicar per 31, en comptes de fer-ho per 301. Si el resultat que va obtenir va ser 372, quin és el resultat que hauria obtingut si no s'hagués equivocat?

A) 3010 B) 3612 C) 3702 D) 3720 E) 30720

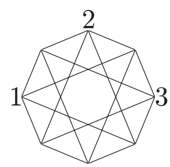
17. En tres partits un equip de futbol va marcar 3 gols i en va encaixar 1. D'aquests partits, l'equip en va guanyar un, en va empatar un altre, i en va perdre el tercer. Quin va ser el resultat del partit que va guanyar?

A) 2-0 B) 3-0 C) 1-0 D) 4-1 E) 0-1

18. Ens donen tres punts no alineats. Volem afegir un punt més per fer un paral·lelogram. Quantes possibilitats hi ha per a posar el quart punt?

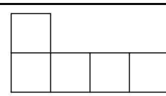
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Depèn dels punts.

19. En l'octògon de la figura s'han dibuixat vuit diagonals. Volem escriure en cada vèrtex un dels números 1, 2, 3 o 4, de manera que en els dos extrems de cadascun dels setze segments dibuixats hi hagi xifres diferents. Si ja hi hem escrit els tres números que es veuen al dibuix, quants 4 ens caldrà col·locar perquè es compleixi la condició?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. En Daniel vol aconseguir enrajolar un quadrat utilitzant només rajoles com les del dibuix. Quin és el nombre més petit de rajoles que pot utilitzar per a aconseguir un quadrat?



A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 20

Qüestions de 5 punts

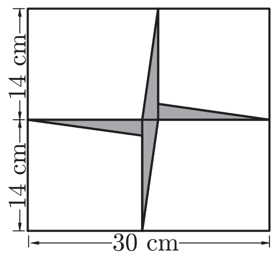
21. En una classe hi ha 10 alumnes entre nois i noies. La professora té 80 fulls de paper per donar als alumnes i s'adona que si els reparteix equitativament entre les noies, n'hi sobren tres. Quants nois hi ha a la classe?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

22. Una gata ha tingut set gatets de colors variats: un de negre, un de blanc, un de gris, un de blanc i negre, un de blanc i gris, un de negre i gris i, el darrer, dels tres colors. Volem triar quatre gatets de manera que dos qualssevol sempre tinguin, com a mínim, un color en comú. De quantes maneres diferents ho podem fer?

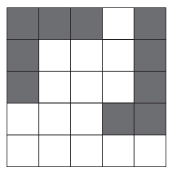
A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

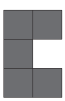
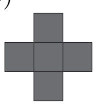
23. Dins del rectangle de la figura hi ha quatre triangles rectangles iguals. Quina és l'àrea total dels quatre triangles?

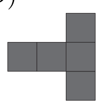
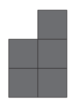


A) 46 cm^2 B) 52 cm^2 C) 54 cm^2 D) 56 cm^2 E) 64 cm^2

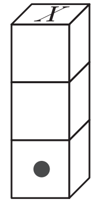
25. En un tauler quadriculat de mida 5×5 hi tenim col·locades dues peces, tal com es veu en el dibuix. Quina de les altres cinc peces es pot col·locar al tauler de manera que impedeixi posar-n'hi cap altra?



A)

B)

C)

D)

E)


26. La figura mostra tres daus convencionals, un damunt l'altre. Un dau convencional té la propietat que els punts de dues cares oposades sumen 7. En la figura, la suma dels punts de qualsevol parell de cares que es toquen és 5. Quants punts hi ha en la cara de dalt de tot, marcada amb una X?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

27. Volem dibuixar quatre circumferències a la pissarra, de manera que dues qualssevol d'aquestes tinguin exactament un punt en comú. Quin és el nombre màxim de punts que poden pertànyer a més d'una circumferència?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

28. Si en un mes s'escauen 5 dissabtes i 5 diumenges i exactament 4 divendres i 4 dilluns, el mes següent tindrà:

A) 5 dimecres
B) 5 dijous
C) 5 divendres
D) 5 dissabtes
E) 5 diumenges

29. Si $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2010}$ i $b = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \cdots + \frac{4019}{2010}$, aleshores $a + b$ és:

A) 4018 B) 4020 C) 2009 D) 2010 E) 2

30. Quants nombres enters i positius de cinc xifres, $\overline{abcde}$, formats per les cinc xifres diferents 1, 2, 3, 4 i 5, podem escriure que compleixin que $\overline{ab}$ és un múltiple de 2, que $\overline{abc}$ és un múltiple de 3, que $\overline{abcd}$ és un múltiple de 4 i que $\overline{abcde}$ és un múltiple de 5?

A) Cap B) 1 C) 2 D) 5 E) 10

Cangur SCM 2011 (24 març) Nivell 1

Qüestions de 3 punts

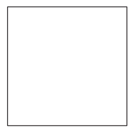
1. Emeten una pel·lícula a la televisió que dura 90 minuts. Cada vegada que han passat deu minuts de pel·lícula, la tallen i fan dos minuts de publicitat. Si comencen a emetre-la a les 19.00 hores, a quina hora acaba la pel·lícula?

A) A les 20 h 30 min
B) A les 20 h 40 min
C) A les 20 h 44 min
D) A les 20 h 46 min
E) A les 20 h 48 min

2. Un motociclista va recórrer una distància de 18 km en 20 minuts. A quina velocitat mitjana va anar?

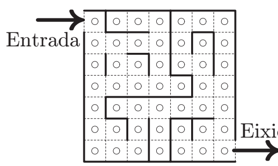
A) 18 km/h B) 36 km/h C) 38 km/h D) 54 km/h E) 72 km/h

3. Hem tallat una rajola quadrada en dos trossos fent-hi un tall recte. Quina de les formes següents no pot ser una de les figures resultants?



A) Un quadrat
B) Un triangle rectangle
C) Un triangle isòsceles
D) Un pentàgon
E) Un rectangle

4. En cada casella d'un laberint màgic hi ha un tros de formatge. Una rateta vol entrar al laberint, recollir tants trossos com li siga possible i marxar del laberint per l'eixida, però hi ha un problema: no pot passar per una mateixa casella dues voltes perquè el gat la caçaria. Quin és el nombre màxim de trossos de formatge que podrà emportar-se?

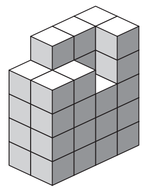


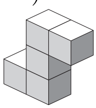
A) 17 B) 33 C) 37 D) 41 E) 49

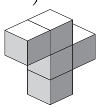
5. A Vilanotrès, les cases del costat dret del carrer tenen nombres senars. Però els habitants d'aquest poble no utilitzen la xifra 3 per a numerar les cases. Si la primera casa del costat dret d'un carrer té el número 1, quin serà el número de la quinzena casa en el mateix costat del carrer?

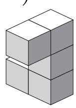
A) 29 B) 41 C) 43 D) 45 E) 47

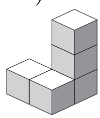
6. Quina de les peces següents necessiteu per a completar el paral·lelepípede de la figura de la dreta?

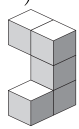


A)


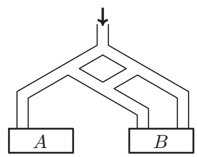
B)


C)


D)


E)


7. El sistema de tubs del dibuix s'ha dissenyat de manera que en cada bifurcació el líquid que hi circula es reparteix en dues parts iguals. Si aboquem 2000 litres d'aigua pel tub de dalt, quants litres d'aigua cauran al dipòsit B?



A) 1500 L B) 1320 L C) 1000 L D) 1333,33 L E) 1600 L

8. Quants nombres enters positius de tres xifres compleixen que el producte de les seues xifres és igual a 9?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. Les imatges mostren un castell fet amb cubs d'un joc de construcció; teniu una imatge en perspectiva (figura 1) i una altra imatge amb la vista superior, des de dalt (figura 2). Quants cubs s'han fet servir per a construir el castell?

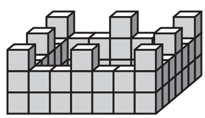


Figura 1

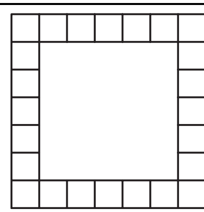


Figura 2

A) 56 B) 60 C) 64 D) 68 E) 72

10. La meva mixeta beu 90 ml de llet els dies que només passeja i pren el sol, però si caça algun ratolí beu una tercera part més de llet. Les dues darreres setmanes ha caçat ratolins dia sí dia no. Quants ml de llet ha begut estes dues setmanes?

A) 1300 ml B) 1400 ml C) 1640 ml D) 1120 ml E) 1470 ml

Qüestions de 4 punts

11. Elisa juga amb cubs i tetràedres. Si té 5 cubs i 3 tetràedres, i numera les cares dels cossos geomètrics, un número en cada cara, successivament 1, 2, 3, . . . fins que acabe amb totes les cares, quantes voltes haurà escrit la xifra 3?

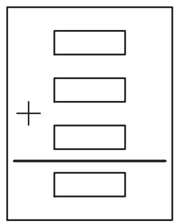
A) 13 B) 14 C) 9 D) 8 E) 6

12. Ens donen un conjunt de tres punts que formen un triangle. Hi volem afegir un punt per fer un paral·lelogram. Quantes possibilitats hi ha per a posar el quart punt?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Depèn del triangle inicial.

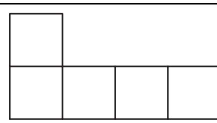
13. Trieu quatre nombres del rectangle de l'esquerra i col·loqueu-los en les caselles del de la dreta, de manera que la suma que s'hi represente siga correcta. Quin nombre no heu triat?

17 167
49 20 98



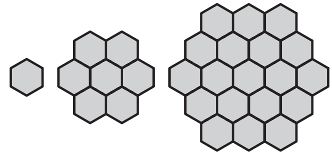
A) 17 B) 20 C) 49 D) 98 E) 167

14. En Daniel vol aconseguir enrajolar un quadrat utilitzant només peces com les del dibuix. Quin és el nombre més petit de peces que pot utilitzar per a aconseguir un quadrat?



A) 16 B) 20 C) 30 D) 48 E) 60

15. Sílvia construeix figures amb peces hexagonals. La primera amb un hexàgon, que envolta amb altres hexàgons per obtenir la segona figura. Després fa el mateix per a obtenir la tercera figura. Si repeteix ordenadament i sistemàticament el procediment, quants hexàgons tindrà la 6a figura?



A) 37 B) 49 C) 61 D) 91 E) 97

16. Pau volia multiplicar un nombre decimal per 408, però s'ha oblidat de pitjar la tecla del 0 i l'ha multiplicat per 48. El resultat d'aquesta operació, que no és la que ell volia, ha estat 2700. Quin és el resultat correcte que hauria d'haver obtingut Pau?

A) 21600 B) 22950 C) 23625 D) 22500 E) Un nombre no enter

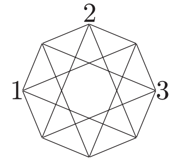
17. Núria ha tirat uma moneda enlaire tres voltes i ha obtingut «cara», «cara» i «cara». Què ha de pensar Núria respecte de les tres properes voltes que tire la moneda?

A) Que només li eixiran «creus».
B) Que només li eixiran «cares».
C) Que li eixiran més «creus» que «cares».
D) Que li eixiran més «cares» que «creus».
E) Que no pot fer cap pronòstic.

18. Considerem els nombres enters compresos entre 1000 i 9999 que es poden escriure utilitzant totes les xifres del número 2011, és a dir, utilitzant un 0, dos 1 i un 2. Si els ordenem en ordre decreixent, quina és la diferència entre el primer i el darrer nombre de la llista?

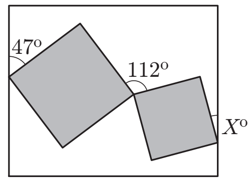
A) 999 B) 1008 C) 1080 D) 1089 E) 1098

19. En l'octògon de la figura s'han dibuixat vuit diagonals. Volem escriure en cada vèrtex una de les xifres 1, 2, 3 o 4, de manera que en els dos extrems de cadascun dels setze segments dibuixats hi haja xifres diferents. Si ja hi hem escrit les tres xifres que es veuen al dibuix, quants 4 ens caldrà col·locar perquè es complisca la condició?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20. Conegudes les mesures dels dos angles marcats en la figura amb 47° i 112°, calculeu la mesura de l'angle indicat com a X° en la figura.



A) 18° B) 21° C) 24° D) 28° E) 47°

Qüestions de 5 punts

21. Hem d'emplenar la taula adjunta amb nombres enters, talment que la suma dels nombres en tres cel·les adjacents en una mateixa fila o en una mateixa columna siga la mateixa en tots els casos. Digueu el nombre que ha d'anar en la cel·la marcada amb «?».

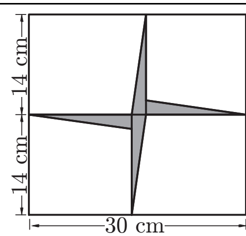
1		2	
	?		
			3
	4		

A) 1
B) 2
C) 3
D) Qualsevol nombre enter
E) És impossible fer el que diu l'enunciat.

22. Una gata ha tingut set gatets de colors variats: un de negre, un de blanc i un de gris, tres de dos colors, blanc i negre, blanc i gris i negre i gris, i el darrer dels tres colors. Volem triar quatre gatets, de manera que dos qualssevol sempre tinguen un color en comú. De quantes maneres diferents ho podem fer?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

23. Dins del rectangle de la figura hi ha quatre triangles rectangles iguals. Cerqueu l'àrea total dels quatre triangles.

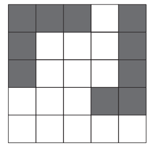


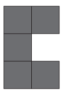
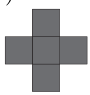
A) 52 cm^2 B) 56 cm^2 C) 64 cm^2 D) 69 cm^2 E) 70 cm^2

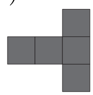
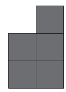
24. Sis nombres diferents es col·loquen al voltant d'un cercle, de tal manera que la diferència de qualssevol dos veïnats és 3 o 5. Sia X la diferència entre el nombre màxim i mínim d'aquests sis nombres. Quin és el valor més gran possible per a X?

A) 15 B) 13 C) 9 D) 5 E) 3

25. En un tauler quadriculat de mida 5×5 hi tenim col·locades dues peces, tal com es veu en el dibuix. Quina de les altres cinc peces es pot col·locar en una certa posició en el tauler, orientada com es veu o girada, de manera que impedisca posar-n'hi cap altra? (S'entén que dues peces no es poden superposar.)



A)

B)

C)

D)

E)


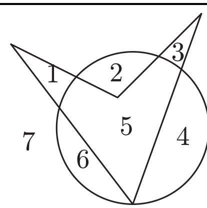
26. Tenim quatre nombres positius a, b, c i d que compleixen $a < b < c < d$. Augmentem en una unitat un dels quatre nombres i, a continuació, els multipliquem. A quin dels quatre nombres hem de sumar 1 per obtenir el resultat més gran?

A) a B) b C) c D) d E) b o c

27. Quants nombres enters i positius de cinc xifres, $\overline{abcde}$, formats per les cinc xifres diferents 2, 3, 4, 5 i 6, podem escriure que complisquen que $\overline{ab}$ és un múltiple de 2, que $\overline{abc}$ és un múltiple de 3, que $\overline{abcd}$ és un múltiple de 4 i que $\overline{abcde}$ és un múltiple de 5?

A) Cap B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

28. Podem veure en la figura adjunta que un cercle i un quadrilàter poden descompondre el pla en set regions. Quin és el nombre màxim de regions en què un quadrilàter i un cercle poden descompondre el pla?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

29. Fent servir un plànol fet a una escala $1:n$, Joan ha calculat l'àrea real d'un terreny, però ho ha fet malament. De fet, Joan ha mesurat correctament l'àrea que volia en el plànol. Després, però, simplement ha multiplicat el resultat pel factor n i no pel correcte. Ara bé, Maria, que sap perfectament el procediment de càlcul, ha vist que l'àrea real, és a dir, el resultat correcte, és un 125% del resultat de Joan. A quina escala s'ha fet el plànol?

A) $1:1{,}25$ B) $1:1{,}5$ C) $1:2$ D) $1:2{,}25$ E) $1:5$

30. El cangur codifica els nombres enters positius: canvia cada xifra parella per la seua meitat (és a dir, substitueix una xifra per una altra) i, en comptes de cada xifra imparella, hi posa el seu doble (és a dir, en aquest cas pot substituir una xifra per una altra o per dues). Per exemple, 43 queda codificat com a 26, i 47 queda codificat com a 214.

Ara, el cangur escull un cert nombre enter i positiu i el codifica segons el seu sistema, torna a codificar el resultat, i així successivament, i així obté una llista de nombres. Quina quantitat de nombres conté la llista més llarga que el cangur pot formar amb aquest mètode, de manera que tots els nombres de la llista siguen diferents?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 11

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi

Josep Maria Gallegos Saliner (Ins. Ramon Muntaner, Figueres), 146.25 punts

Segon premi

Pau Mir Garcia (Institut de Sant Quirze del Vallès), 140 punts

Tercers premis, ex-aequo

Arnald Morató Gutiérrez (Institut Vil·la Romana, La Garriga),
i Laura Roigé Foix (CEPA Oriol Martorell, Barcelona), 138.75 punts

Altres premis

Miquel Villalba Castells (Institut Alt Penedès, Vilafranca del Penedès)
i Inés Franch López (Aula Escuela Europea, Barcelona), 137.5 punts
Jordi Borrel Vives (Institut Priorat, Falset), 135 punts
Ivan Parrot Martínez (Institut Manuel Carrasco i Formiguera, Barcelona)
i Gerard Orriols Giménez (Institut Thalassa, Montgat), 133.75 punts
Iris Balcázar Castell (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 133.5 punts
Alex Armengou Fages (Sant Ignasi, Barcelona), 132.5 punts
Cristina Terraza Rovira (Sant Felip Neri, Barcelona),
Carles Checa Nualart (Institut Jaume Balmes, Barcelona)
i Sergi Pujol Ruiz (Institut Ramon Coll i Rodés, Lloret de Mar), 130 punts
Blanca Puche Perna (Institut Vall d'Arús, Vallirana)
i Joel Suñé Margineda (Institut Menéndez y Pelayo, Barcelona), 128.75 punts
Guillermo De Muller Trinxet (Montserrat, Barcelona), 128.5 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Lídia Cadevall Soto (Institut Castellet, Sant Vicenç de Castellet)
Anna Solà Hernández (Institut Castell d'Estela, Amer),
José Antonio Suárez Roig (Aula Escuela Europea, Barcelona)
i Joan Seguí Mercadal (Jesús, Maria i Josep, Barcelona), 127.5 punts
Laia Marín Gual (Tecnos, Terrassa),
Aleix Lascorz Guiu (Institut Lluís Domènech i Montaner, Reus),
Alex Párraga Ferrer (Institut Dr. Puigvert, Barcelona),
Pol Febrer Calabozo (Institut Francisco de Goya, Barcelona),
Arnald Vilella Muela (Institut Lluís Domènech i Montaner, Reus)
i Oriol Herrero Molina (Thau, Sant Cugat del Vallès), 126.25 punts
Alex Bel Gonzàlez (Institut Gorgs, Cerdanyola del Vallès)
i Luís Zheng Lin (Pere Vergés, Badalona), 125 punts
Víctor Manuel Quintas Martínez (Ins. El Foix, Santa Margarida i els Monjos),
i Ferran Illa Capellas (Pere Vergés, Badalona), 124.75 punts
Àlex Guerrero Almirall (Escola Pia Balmes, Barcelona),
Damià González Rodríguez (Institut Thos i Codina, Mataró),
i Pol Ureta Cañellas (Escola Pia de Sabadell, Sabadell), 123.75 punts
Marc Salvadó Benasco (Virolai, Barcelona),
Elia Climent Figuerola (Sagrat Cor de Jesús, Tarragona),
Guillermo Ródenas Alesina (Institut Salvador Espriu, Barcelona),
Rafael Ávila Parra (Aula Escuela Europea, Barcelona),
Sven Wallin Haro (Sagrada Família, Viladecans),
i Neus Riera Vives (Freta, Mataró), 122.5 punts
Sara Jubés Monforte (Frederic Mistral-Tècnic Eulàlia, Barna.), 121.75 punts
Irene Berbegal Pardos (Institut Banús, Cerdanyola del Vallès),
Robert Pérez García (Institut Pompeu Fabra, Martorell),
i Joan Aguanyo Planell (Institut La Llauna, Badalona), 121.25 punts
Rubén Alinque Dianez (Ins. Ramon Casas i Carbó, Palau-solità i Plegamans)
i Pol Zanuy Lafarga (Institut Secretari Coloma, Barcelona), 120 punts
Xavier Arasa Aguirre (Teresià, Tortosa),
Isaac Sales Juan (Santo Ángel, Gavà)
i Marc Garrigó Invers (Tecnos, Terrassa), 119.75 punts
Santiago Castanedo Fontanillas (Ins. Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat)
i Louis Pierre Joseph Clergue (Institut Cendrassos, Figueres), 118.75 punts
Ariadna Estradé Alasà (Aura, Reus)
i Eder Rodríguez Perelló (SES de Masquefa, Masquefa), 118.5 punts
Bet Noguer Pich (Institut Mediterrània, El Masnou), 118.25 punts
Ginebra Alsina Albert (Institut Antoni Torroja, Cervera),
Yerai Bonilla González (Santo Ángel, Gavà),

Paula De Urquía Maynés (Claver, Lleida),
María Álvarez Aunòs (Sant Pau Apòstol, Tarragona),
Nil Garcés de Marcilla (Institut Antoni de Martí i Franquès, Tarragona)
i Carles Domingo Enrich (El Cim, Vilanova i la Geltrú), 117.5 punts
Óscar Bustillo Ballester (Thau, Barcelona), 117.25 punts
Antonio Domingo Oriol (Thau, Barcelona),
Sergi Cuesta Arcos (Sant Gabriel, Viladecans),
Xènia Ferrer Vilaseca (Institut Jaume Vicens Vives, Girona),
Martí Crusells Vega (Pare Manyanet, Barcelona),
Aina Solà Alcúdia (Tecnos, Terrassa),
Laura Vidal Doménech (Institut Pius Font i Quer, Manresa)
i Anna Maudos Segarra (Proa, Barcelona), 116.25 punts

Premis. País Valencià

Primer premi
Damià Torres Latorre (IES Guadassuar, Guadassuar), 131.25 punts

Segon premi
Alejandro Palacios Membrilla (IES Álvaro Falomir, Almassora), 118.75 punts

Tercer premi Alberto Núñez Delgado (Madre Vedruna Sagrado Corazón, Castelló de la Plana), 117.5 punts

Altres premis
Javier Ruiz Ros (IES La Garrigosa, Meliana), 115 punts
Andrés Alarcón Galera (IES Álvaro Falomir, Almassora), 113.75 punts
Carlos Salom García (IES Miquel Peris i Segarra, Castelló de la Plana-Grau), 113.75 punts
Ignacio García Soriano (IES Número 3, Villena), 112.25 punts
Raquel Llorens Hernández (IES Juan de Garay, València), 110.75 punts
Nerea Gutiérrez Nájera (IES La Torreta, Elda), 110 punts
Raúl Bellón Fernández (IES Gregori Maians, Oliva), 108.75 punts

Premis. Balears

Primer premi

Rafel Perelló Ribas (IES Sineu, Sineu), 132.50 punts

Segon premi

Álvaro Malo García (Col·legi La Salle, Maó), 131.00 punts

Tercer premi

Nicolás Ferrer Forteza-Rey (Col·legi Sagrat Cor, Palma), 129.75 punts

Altres premis

Bartomeu Costa Prats (IES Quartó de Portmany, Sant Antoni de Portmany), 122,25 punts
Miquel Serra (IES Santanyí, Santanyí), 121,25 punts
Aina Forteza Gómez (IES Joan Alcover, Palma), 118 punts
Antoni Vallejo Tomàs (IES Josep Font i Trias, Esporles)
i Antoni Garau Segui (IES Madina Mayurqa, Palma), 117,25 punts
Margalida Perelló Roig (IES Mossèn Alcover, Manacor), 117 punts
Julià Ballester Simon (Col·legi Sagrat Cor, Palma), 116 punts

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 1

Qüestions de 3 punts. Solucions

1. C. Dimecres.

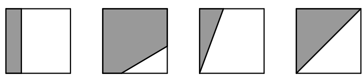
CANGURET té 8 lletres. Si comencem un dimecres (amb la **C**), després necessitarem set dies més per acabar la paraula: el proper dimecres escriurem la 8a lletra.

2. E. 56 km/h.

Si en 30 minuts fa 28 km, en 1 hora farà 56 km.

3. A. Un quadrat.

Un rectangle, un pentàgon, un triangle rectangle (no isòsceles), i un triangle (rectangle) isòsceles sí que es poden aconseguir.



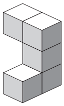
Per tant la que no es pot aconseguir és un quadrat.
També es pot raonar que amb un sol tall no podem obtenir un altre quadrat. Perquè la figura tingui quatre angles rectes el tall s'ha de fer paral·lelament a un dels costats del quadrat per un punt d'un dels costats i així sempre quedarà un rectangle no quadrat.

4. B. 13.

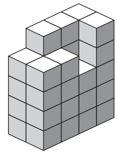
Hi ha dos camins que permeten menjar 13 pedretes i no n'hi ha cap que permeti menjar-ne més.

5. E. 47.

Amb una sola xifra hi ha 4 nombres, amb dues xifres i més petits que 30 n'hi ha 8 més, això fa 12 cases; del 31 al 39 no poden aparèixer. Llavors en comptem tres més 41, 45 i 47, que serà la quinzena casa.
Naturalment en aquest cas també es pot fer escrivint-les totes: 1, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 41, 45, 47.

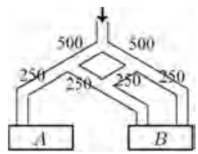
6. E.  .

Podeu veure que es necessita una peça que tingui 1, 3, 1 cubets, que és la E.



7. B. 750 L.

Al dipòsit B hi arriben 250 litres directes pel tub de la dreta més 500 litres (250 + 250) que vénen per l'altre conducte.



8. A. 5.

A més de 01-03-05 poden ser 03-05-07, 05-07-09, 07-09-11, 09-11-13 i ja no n'hi ha més perquè no existeix el mes número 13.

9. E.167.

No poden ser ni el 17 ni el 30 ni el 49 ni el 96 perquè la suma dels tres nombres que queden no pot donar 167 (mai acabaria en 7) i si traiem el 167 sí que es compleix que 17+30+49 = 96.

10. B. 980 ml.

Una tercera part més de 60 és 80. Llavors cada dos dies beu 60 + 80 = 140 ml. En dues setmanes beurà 140 × 7 = 980 ml.

Qüestions de 4 punts. Solucions

11. D.

12. 2. 891.

Els nombres contigus al 2011 són 2101 i 1210 i la seva diferència és 891.

13. D. d.

Si ho provem amb uns nombres concrets veurem que el nombre al qual se l'ha d'augmentar d'una unitat ha de ser el d. Però també és interessant raonar-ho en general. Si observem que $(a+1)bcd = abcd + bcd$, que $a(b+1)cd = abcd + acd$, que $ab(c+1)d = abcd + abd$, i que $abc(d+1) = abcd + abc$, ens adonem que , com que a, b, c, d són positius i $a < b < c < d$, d'aquestes quatre expressions aquella en què sumem un nombre més petit a $abcd$ és l'última.

14. C.64.

El costat del quadrat dibuixat, que forma la tanca exterior de la regió, serà de 10 cubets (si és n ha de ser $n + (n-2) + n + (n-2) = 36$) i per tant la regió interior tindrà de costat 8 cubets i es necessitaran 64 cubets per omplir-la.

15. D.56.

Si hi ha 25 lloses grises això vol dir que hi ha cinc files amb 5 lloses grises cadascuna i per tant l'habitació quadrada tindrà 9 lloses en cada costat. Aleshores per resoldre el problema podem calcular quantes lloses hi haurà en total i restar-li les grises: 81 - 25 = 56. També es pot resoldre comptant les lloses blanques: per files, $5 \times 4 + 4 \times 9 = 56$

16. B. 3612.

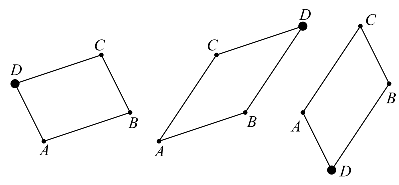
Si fem $372 \div 31 = 12$ tenim l'altre factor. Ja podem fer $12 \times 301 = 3612$.

17. B. 3-0.

Com que segur que el dia que va perdre és el dia que va encaixar l'únic gol, els tres resultats només poden ser 3 - 0, 0 - 0, i 0 -1. Per tant el resultat del partit que van guanyar va ser 3 - 0.

18. C. 3.

Si anomenem A, B, C els tres punts donats i D el quart vèrtex que busquem, els tres paral·lelograms possibles seran $ABCD$, $ABDC$, i $ADBC$. A la dreta en teniu un exemple.



19. D. 4.

El vèrtex entre el punt 2 i el 3 ha tenir el 4 perquè també hi arriba un segment que surt de l'1. Per la mateixa raó el vèrtex entre el 2 i l'1 ha de tenir el 4. El vèrtex següent al 3 en sentit horari també ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents de l'1 i del 2. I el vèrtex següent a l'1 en sentit antihorari ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents del 2 i del 3. Com que entre els dos 4 no hi pot anat un altre 4 resulta que necessitem quatre 4.

20. E. 20.

El quadrat resultant ha de tenir àrea múltiple de 5 (que són els quadrets que té cada peça). Podeu comprovar que el quadrat de costat 5 no es pot construir amb peces com la de la figura. El següent quadrat d'àrea múltiple de 5 és el de costat 10 que sí es pot construir, amb 20 peces com les de la figura ($5 \times 20 = 100$). Uniu dues peces de manera que formin un rectangle de 5×2 i amb 10 d'aquestes peces-dobles“ omplireu de seguida el quadrat.

Qüestions de 5 punts. Solucions

21. C. 3.

Si f és el nombre de fulls i n el nombre de noies, $80 = n \times f + 3$; llavors $80 - 3 = 77$. Com que els divisors de 77 són 1, 7, 11, 77 i per l'enunciat hi ha més d'una noia però com a màxim 10, això ens diu que hi ha 7 noies i, per tant, hi ha 3 nois.

22. C. 4.

No en podem escollir dos d'un sol color perquè no complirien la condició de tenir almenys un color comú. Si n'agafem un d'un sol color haurem d'agafar els dos gatets de dos colors que tenen aquest color i, a més, el gatet de tres colors. Això dóna les possibilitats següents: $\{NBG, NB, NG, N\}$; $\{NBG, BN, BG, B\}$ i $\{NBG, GB, GN, G\}$. Encara queda la possibilitat de triar tots els gatets que tenen colors variats: $\{NBG, NB, NG, BG\}$.

23. D. 56 cm^2.

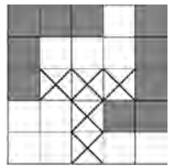
El catet llarg de tots els triangles és 14 cm perquè són iguals. El catet curt ha de ser 2 cm ($30 - 2 \times 14 = 2$). Per tant l'àrea de cada triangle és 14 cm^2 i el total és $14 \times 4 = 56$ cm^2.

24. C. 2.

L'Andreu i en Marc diuen el mateix, és a dir que tots dos diuen la veritat o tots dos menteixen. Si tots dos diuen la veritat es comprova que en Pere i en Toni menteixen; si l'Andreu i en Marc menteixen es comprova que els altres dos diuen la veritat. És a dir, segur que hi ha dues persones que menteixen i dues que diuen la veritat.

25. D.

Com que l'enunciat ens diu que podem col·locar la peça, sense restriccions, amb l'objectiu d'impedir posar-n'hi cap altra, podeu veure que ho aconseguim amb la peça D situada com es veu a la figura.

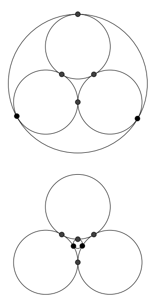


26. E. 6.

A la cara superior del dau de sota només pot haver-hi un 2, un 3 o un 4 (perquè la suma amb la cara de sobre ha de ser 5). Llavors a la cara inferior del dau del mig podria haver-hi un 3, un 2 o un 1. Si analitzem cada un d'aquests casos veurem, respectivament, que a la cara superior del dau del mig hauria d'haver-hi un 4, un 5 (que no és possible) o un 6 (que tampoc és possible). És a dir que només pot haver-hi un 4. Llavors a la cara de sota del dau superior ha d'haver-hi un 1 i a la cara de sobre del dau superior ha d'haver-hi un 6.

27. D. 6.

És clar que les circumferències han de ser tangents dues a dues. El màxim de punts que pertanyin a dues circumfrències s'assolirà quan tots els punts de tangència siguin diferents. I això succeeix si dibuixem tres cirucmferències tangents dues a dues i una altra circumferència tangent a totes tres (amb dues possibilitats per fer-ho, com veieu a la figura). En total hi ha 6 punts que pertanyen a més d'una circumferència.



28. A. 5 dimecres.

De les condicions de l'enunciat podem deduir que el mes comença en dissabte i acaba en diumenge i que per tant té 30 dies. A un mes de 30 dies sempre li segueix un mes de 31 dies. Llavors el mes següent, que començarà en dilluns, acabarà en dimecres i per tant tindrà 5 dimecres, 4 dijous, 4 divendres, 4 dissabtes i 4 diumenges.

29. A. 4018.

Si sumen el primer sumand de la primera suma amb el primer sumand de la segona veiem que el resultat és 2. El mateix succeeix amb la suma dels segons sumands, amb la dels tercers sumands, etc., fins a arribar a la suma dels termes que estan al lloc 2009. Per tant el resultat serà $2 \times 2009 = 4018$.

30. E. Cap.

Que el nombre $\overline{abcde}$ sigui divisible per 5 ens diu que $e = 5$. Que les dues primeres xifres formin un nombre $\overline{ab}$ divisible per 2 ens diu que b ha de ser 2 o 4. Que les tres primeres xifres formin un nombre $\overline{abc}$ divisible per 3 ens diu que $a+b+c$ ha de ser múltiple de 3. Que les 4 primeres xifres formin un nombre $\overline{abcd}$ divisible per 4 ens diu que $\overline{cd}$ ha de ser divisible per 4, i això només pot succeir si $d = 2$ o bé $d = 4$. Per tant b i d han de ser, en algun ordre, 2 i 4 i, doncs, a i c només poden ser 1 i 3 i aleshores és impossible que $a + b + c$ sigui múltiple de 3 ni per al 2 ni per al 4.

Cangur SCM 2011 (24 març) Nivell 1

Qüestions de 3 punts. Solucions

---

1. D. A les 20 h 46 min.

Si la pel·lícula dura 90 minuts i cada vegada que passen 10 minuts de pel·lícula, la tallen, faran 8 talls (i no 9, perquè al minut 90 ja ha acabat la pel·lícula). Aquests 8 talls represneten 16 minuts. Alehsores els 90 minuts de la pel·lícula més aquests 16 minuts a partir de les 19 h ens porten a les 20 h 46 min.

---

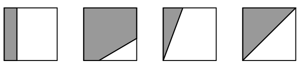
2. D. 54 km/h.

Si en 20 minuts fa 18 km, en 1 hora, que és el triple de 20 minuts, farà 54 km.

---

3. A. Un quadrat.

Un rectangle, un pentàgon, un triangle rectangle (no isòsceles), i un triangle (rectangle) isòsceles sí que es poden aconseguir.

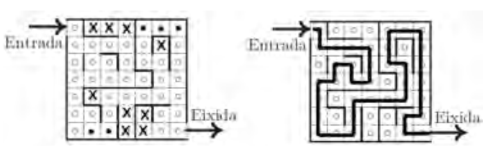


Per tant la que no es pot aconseguir és un quadrat.
També es pot raonar que amb un sol tall no podem obtenir un altre quadrat. Perquè la figura tingui quatre angles rectes el tall s'ha de fer paral·lelament a un dels costats del quadrat per un punt d'un dels costats i així sempre quedarà un rectangle no quadrat.

---

4. C. 37.

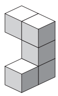
Podeu veure que les caselles marcades amb $\times$ no són factibles si no podem passar dues voltes per la mateixa casella. Per les caselles marcades amb $\bullet$ hi hem de passar segur per anar de l'entrada a l'eixida i per fer el camí més llarg possible. Amb tot això ja veureu que el camí assenyalat (que passa per 37 caselles) és el més llarg possible.



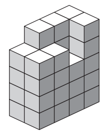
---

5. E. 47.

Amb una sola xifra hi ha 4 nombres, amb dues xifres i més petits que 30 n'hi ha 8 més, això fa 12 cases; del 31 al 39 no poden aparèixer. Llavors en comptem tres més 41, 45 i 47, que serà la quinzena casa.
Naturalment en aquest cas també es pot fer escrivint-les totes: 1, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 41, 45, 47.

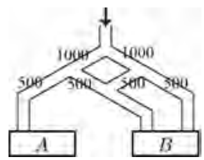
6. E.  .

Podeu veure que es necessita una peça que tingui 1, 3, 1 cubets, que és la E.



7. A. 1500 L.

Al dipòsit B hi arriben 500 litres directes pel tub de la dreta més 1000 litres (500 + 500) que vénen per l'altre conducte.



8. E. 6.

Les úniques possibilitats perquè amb nombres enters positius, a, b i c es compleixi $abc = 9$ és que dues de les xifres siguin un 1 i l'altre 9 (això dóna tres nombres 119, 191, 911) o bé que una de les xifres sigui un 1 i les altres dues un 3 (tres nombres més 133, 313, 331).

9. A. 56.

La figura 2 de l'enunciat ens indica que només hi ha cubs formant els costats d'un quadrat, sense cap altre cub a l'interior del quadrat. Aleshores podem veure que a la part frontal hi ha 17 cubs, els mateixos que hi haurà al darrere. A la dreta, que no haguem comptat, hi ha 11 cubs més, i igualment a l'esquerra. En total doncs $2 \times 17 + 2 \times 11 = 56$.

10. E. 1470 ml.

Una tercera part més de 90 és 120. Llavors cada dos dies beu $90 + 120 = 210$ ml. En dues setmanes beurà $210 \times 7 = 1470$ ml.

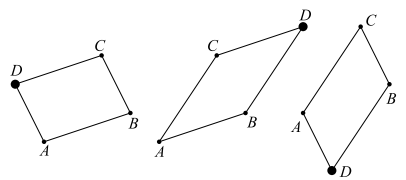
Qüestions de 4 punts. Solucions

11. B. 14.

Si Elisa té 5 cubs i 3 tetràedres el nombre total de cares d'eixes figures és $5 \times 6 + 3 \times 4 = 42$. Si escrivim els números de l'1 al 42 haurem fet servir 1 volta la xifra 3 per al 3, una altra per al 13 i 11 voltes per als nombres del 30 al 39. En total, 14 voltes la xifra 3.

12. C. 3.

Si anomenem A, B, C els tres punts donats i D el quart vèrtex que busquem, els tres paral·lelograms possibles seran $ABCD$, $ABDC$, i $ADBC$. A la dreta en teniu un exemple.



13. E.167.

No pot ser el 167 perquè $17 + 49 + 20$ no dóna 98; no poden ser ni el 20 ni el 49 ni el 98 perquè la suma dels tres nombres que queden no pot donar 167 (mai acabaria en 7) i si traiem el 17 sí que es compleix que $49+20+98 = 167$.

14. B. 20.

El quadrat resultant ha de tenir àrea múltiple de 5 (que són els quadrets que té cada peça). Podeu comprovar que el quadrat de costat 5 no es pot construir amb peces com la de la figura. El següent quadrat d'àrea múltiple de 5 és el de costat 10 que sí es pot construir, amb 20 peces com les de la figura ($5 \times 20 = 100$). Uniu dues peces de manera que formin un rectangle de 5×2 i amb 10 d'aquestes peces-dobles" omplireu de seguida el quadrat.

15. D.91.

La primera figura té 1 hexàgon, que s'envolta amb 6 hexàgons per a la segona figura. A la tercera figura els nous hexàgons són 6×2. A la quarta figura posarem 6×3 nous hexàgons. I així successivament, a la sisena figura hi haurà $1 + 6 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 + 6 \times 5 = 91$ hexàgons.

16. B. 22950.

Si fem $2700 \div 48 = 56.25$ tenim el nombre decimal de l'enunciat. Ja podem fer $56.25 \times 408 = 22950$.

17. 5. No pot fer cap pronòstic.

Aquesta és una qüestió del tot conceptual sobre la idea de probabilitat: els resultats d'unes tirades no donen cap informació sobre la posterior.

18. E. 1098.

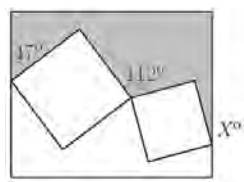
El primer nombre de la llista és el 1012 i l'últim és el 2110. La diferència és $2110 - 1012 = 1098$.

19. B. 4.

El vèrtex entre el punt 2 i el 3 ha tenir el 4 perquè també hi arriba un segment que surt de l'1. Per la mateixa raó el vèrtex entre el 2 i l'1 ha de tenir el 4. El vèrtex següent al 3 en sentit horari també ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents de l'1 i del 2. I el vèrtex següent a l'1 en sentit antihorari ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents del 2 i del 3. Com que entre els dos 4 no hi pot anat un altre 4 resulta que necessitem quatre 4.

20. B. 21°.

Si observem l'heptàgon que s'ha remarcat a la figura, els seus angles sumen $5 \times 180° = 900°$. És a dir $47° + 270° + 112° + 270° + X° + 90° + 90° = 900°$. Deduïm que $X° = 21°$.



Qüestions de 5 punts. Solucions

21. D. Qualsevol nombre enter.

A partir de l'enunciat es dedueix que a la casella de l'esquerra d'una fila hi ha d'anar el mateix nombre que a la casella de la dreta (perquè si a, b, c, d són els nombres d'aquesta fila, ha de ser $a+b+c = b+c+d$). Semblantment succeeix amb el nombre superior de cada columna i el nombre inferior. També veiem que en aquest cas la suma de tres nombres consecutius ha de ser 7 i podem trobar el nombre inicial i final de la segona fila. Però ja no podem concloure res més. Qualsevol nombre pot anar a la casella demanada,com es mostra a la figura.

1	4	2	1
3	x	$4-x$	3
3	$3-x$	$x+1$	3
1	4	2	1

22. C. 4.

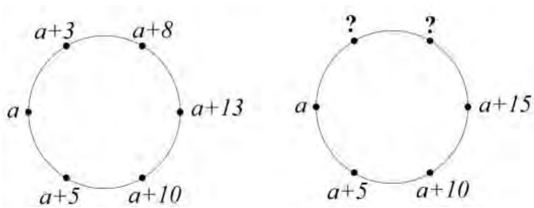
No en podem escollir dos d'un sol color perquè no complirien la condició de tenir al menys un color comú. Si n'agafem un d'un sol color haurem d'agafar els dos gatets de dos colors que tenen aquest color i, a més, el gatet de tres colors. Això dóna les possibilitats següents: $\{NBG, NB, NG, N\}$; $\{NBG, BN, BG, B\}$ i $\{NBG, GB, GN, G\}$. Encara queda la possibilitat de triar tots els gatets que tenen colors variats: $\{NBG, NB, NG, BG\}$.

23. B. 56 cm^2.

El catet llarg de tots els triangles és 14 cm perquè són iguals. El catet curt ha de ser 2 cm $(30 - 2 \times 14 = 2)$. Per tant l'àrea de cada triangle és 14 cm^2 i el total és $14 \times 4 = 56$ cm^2.

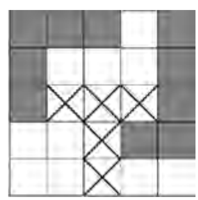
24. B. 13.

La figura de l'esquerra mostra que es pot aconseguir una diferència de 13. Per aconseguir una diferència de 15 és clar que hauria de ser en dos punts diametralment oposats i que hauríem de començar com a la figura de la dreta, però aleshores no seria possible acabar de completar el conjunt de nombres del cercle amb sis nombres diferents.



25. D.

L'enunciat ja ens diu que podem col·locar la peça girada amb l'objectiu d'impedir posar-n'hi cap altra. Podeu veure que ho aconseguim amb la peça D situada com es veu a la figura.



26. D. d.

Si ho provem amb uns nombres concrets veurem que el nombre al qual se l'ha d'augmentar una unitat ha de ser el a. Però també és interessant raonar-ho en general. Si observem que $(a+1)bcd = abcd + bcd$, que $a(b+1)cd = abcd + acd$, que $ab(c+1)d = abcd + abd$, i que $abc(d+1) = abcd + abc$, ens adonem que , com que a, b, c, d són positius i $a < b < c < d$, d'aquestes quatre expressions aquella en què sumem un nombre més gran a $abcd$ és la primera.

---

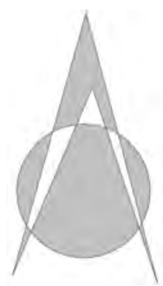
27. C. 2.

Que el nombre $\overline{abcde}$ sigui divisible per 5 ens diu que $e = 5$. Que les dues primeres xifres formin un nombre $\overline{ab}$ divisible per 2 ens diu que b ha de ser 2, 4 o 6. Que les tres primeres xifres formin un nombre $\overline{abc}$ divisible per 3 ens diu que $a + b + c$ ha de ser múltiple de 3. Que les 4 primeres xifres formin un nombre $\overline{abcd}$ divisible per 4 ens diu que $\overline{cd}$ ha de ser 24, 32 o 36 (no hi pot aparèixer el 5). Si $\overline{cde} = 245$ aleshores seria $b = 6$ i $a = 3$ i no es compleix l'enunciat, $a + b + c$ no és múltiple de 3. Si $\overline{cde} = 325$ aleshores ni amb $\overline{ab} = 46$ ni amb $\overline{ab} = 64$, $a + b + c$ no és múltiple de 3. En canvi si $\overline{cde} = 365$ aleshores tant amb $\overline{ab} = 24$ com amb $\overline{ab} = 42$, $a + b + c$ és múltiple de 3 i es compleix l'enunciat.

---

28. D. 10.

El màxim nombre de regions és 10; en teniu un exemple a la figura de la dreta on hi podeu veure quatre regions blanques i sis de color gris. No pot ser 11 perquè en la figura hi ha el màxim nombre de talls que poden tenir quatre segments i un cercle i, a més, amb tots els vèrtexs fora del cercle.



---

29. A. $1:1{,}25$.

Maria sap que la raó de les àrees és el quadrat de la raó de semblança, que és el que ens dóna l'escala. Com que Joan ha multiplicat per n en comptes de multiplicar per n^2 podem saber que per passar del resultat de Joan al correcte cal multiplicar per n. Si això representa el 125%, és que estem multiplicant per $n = 1{,}25$.

30. C. 5.

Si mirem la codificació de cada xifra individualment fins que aparegue un nombre repetit veurem que la llista més llarga resulta quan analitzem el 9: $\{9, 18, 24, \underline{12}, 21, \underline{12}\}$ per al qual el nombre que es repeteix és el sisè, igual al quart. Com que es dóna el cas que, si mirem les altres xifres, en tots els casos el sisè nombre de la llista de codificacions és igual que el quart, per exemple $\{1, 2, 1, \underline{2}, 1, \underline{2}\}$, ..., $\{5, 10, 20, \underline{10}, 20, \underline{10}\}$, ..., $\{7, 14, 22, \underline{11}, 22, \underline{11}\}$, ... resultarà que per a qualsevol nombre que codifiquem, si no abans, el sisè de la llista ja serà repetit. Per exemple $\{7\,9, 14\,18, 22\,24, 11\,12, 22\,21, 11\,12\}$ on s'han posat uns petits espais per indicar que en realitat la codificació no és "del número" sinó de cada xifra inicial per separat.

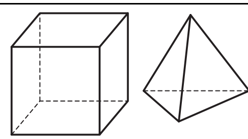
Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 2

Qüestions de 3 punts

1. Hem escrit la paraula "**CANGURET**" 2011 vegades, començant a les 10 del matí, una lletra cada segon. A quina hora hem acabat?

A) Entre les 13 i les 14 hores
B) Entre les 14 i les 15 hores
C) Entre les 15 i les 16 hores
D) Després de les 16 hores
E) Abans de les 13 hores

2. L'Elsa juga amb cubs i tetràedres. Té 5 cubs i 3 tetràedres. Quantes arestes té en total?



A) 78 B) 60 C) 52 D) 48 E) 42

3. En un pas zebra hi ha franges blanques i negres, totes d'amplada 50 cm. En una carretera, el pas comença i acaba amb una franja blanca. Aquest pas té 8 franges blanques. Quina és l'amplada de la carretera?

A) 7 m B) 7,5 m C) 8 m D) 8,5 m E) 9 m

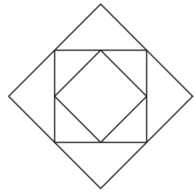
4. La meua calculadora és un poc especial. Divideix en comptes de multiplicar i resta en comptes de sumar. Si hi escric $12 \times 3 + 4 \times 2$, quin és el resultat que em mostra?

A) 2 B) 6 C) 12 D) 28 E) 44

5. El meu rellotge digital marca les 20.11 hores. Quants minuts falten per a la propera vegada que mostri exactament les xifres 0, 1, 1 i 2 en algun ordre?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

6. La figura mostra tres quadrats. El quadrat mitjà uneix els punts mitjans del quadrat gran. El quadrat petit uneix els punts mitjans del quadrat mitjà. L'àrea del quadrat petit de la figura és de 6 cm^2. Quina és la diferència entre l'àrea del quadrat gran i l'àrea del quadrat mitjà en cm^2?



A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

7. El meu carrer té 17 cases. Jo visc en el número 12 que és la darrera casa del costat dels números parells. El meu cosí viu a l'última casa de l'altre costat. Quin número té casa seva?

A) 5 B) 7 C) 13 D) 17 E) 21

8. El gat Fèlix caça 12 peixos en 3 dies. Cada dia agafa més peixos que el dia anterior i el tercer dia n'agafa menys que en els dos primers dies junts. Quants peixos agafa el gat Fèlix el tercer dia?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

9. De tots els nombres de tres xifres, la suma de les quals és 8, triem el més gran i el més petit. Quant sumen aquests dos nombres?

A) 707 B) 907 C) 916 D) 1000 E) 1001

10. En tres partits un equip de futbol va marcar 3 gols i en va encaixar 1. D'aquests partits, l'equip en va guanyar un, en va empatar un altre i en va perdre el tercer. Quin va ser el resultat del partit que va guanyar?

A) 2-0 B) 0-1 C) 1-0 D) 2-1 E) 3-0

Qüestions de 4 punts

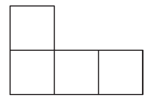
11. El resultat de l'operació $\dfrac{2011 \cdot 2{,}011}{201{,}1 \cdot 20{,}11}$ és:

A) 0,01 B) 0,1 C) 1 D) 10 E) 100

12. La Maria té nou perles que pesen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 grams, respectivament. En fa quatre anells amb dues perles cadascun. El pes de les perles d'aquests quatre anells és de 17, 13, 7 i 5 grams. Quant pesa la perla que queda?

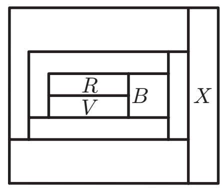
A) 1 g B) 2 g C) 3 g D) 4 g E) 5 g

13. El diagrama mostra una figura en forma de L a partir de quatre quadrats petits. Hi volem afegir un quadradet per formar una figura amb un eix de simetria. De quantes maneres ho podem fer?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. Cal pintar cada regió del diagrama amb un dels quatre colors següents: roig (R), verd (V), blau (B) i groc (G). Dues regions veïnes han de ser de colors diferents. Per tant, el color de la regió X ha de ser:

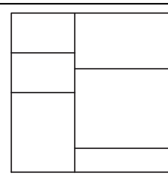


A) Roig B) Blau C) Verd D) Groc E) No és possible determinar-lo.

15. De la llista de qualificacions següent: 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 i 16, quines dues qualificacions es poden suprimir sense que la mitjana varïi?

A) 12 i 17 B) 5 i 17 C) 9 i 16 D) 10 i 12 E) 14 i 10

16. Tenim un full de paper quadrat i el tallem en sis rectangles, com es mostra en la figura. La suma dels perímetres dels sis rectangles és de 120 cm. Quina és l'àrea del full de paper quadrat?



A) 48 cm^2 B) 64 cm^2 C) 110,25 cm^2 D) 144 cm^2 E) 293,87 cm^2

17. Si $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2010}$ i $b = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \cdots + \frac{4019}{2010}$, aleshores $a + b$ és:

A) 2 B) 4020 C) 2009 D) 2010 E) 4018

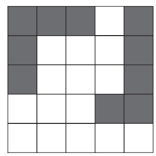
18. Na Laia dibuixa un segment DE de longitud 2 en un tros de paper. Quants punts diferents F pot dibuixar en el paper de manera que el triangle DEF sigui rectangle i d'àrea 1?

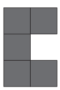
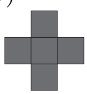
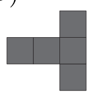
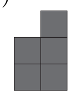
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

19. El nombre positiu a és més petit que 1, i el nombre b és més gran que 1. Quin dels nombres següents és el més gran?

A) $a \times b$ B) b C) $\dfrac{a}{b}$ D) $a + b$
E) La resposta depèn dels valors de a i b.

20. En un tauler quadriculat de mida 5×5 hi tenim col·locades dues peces, tal com es veu en el dibuix. Quina de les altres cinc peces es pot col·locar en el tauler de manera que impedeixi posar-n'hi cap altra?



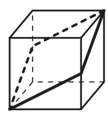
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

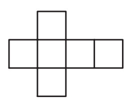
Qüestions de 5 punts

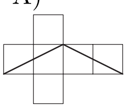
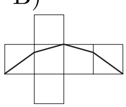
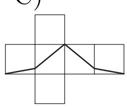
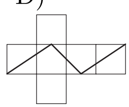
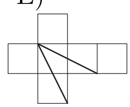
21. El número de cinc xifres $\overline{24X8Y}$ és divisible per 4, 5 i 9. Quant sumen les xifres X i Y?

A) 13 B) 10 C) 9 D) 5 E) 4

22. Es construeix un cub a partir del desplegament mostrat. Observeu la línia dibuixada que divideix la superfície del cub en dues parts iguals. Com es veu aquesta línia en el cub desplegat?





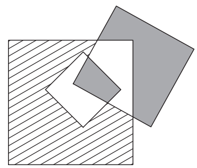
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

23. Tres ocells, l'Isaac, en Max i l'Òscar són cadascun al seu niu. l'Isaac diu: *"Jo estic més del doble de lluny d'en Max que de l'Òscar"*. En Max diu: *"Jo estic més del doble de lluny de l'Òscar que de l'Isaac"*. L'Òscar diu: *"Estic més del doble de lluny d'en Max que de l'Isaac"*. Com a mínim, dos dels ocells diuen la veritat. Quin dels tres menteix?

A) L'Isaac B) En Max C) L'Òscar D) Cap d'ells
E) És impossible saber-ho.

---

24. Dibuixam un quadrat de costat 3 cm dins d'un quadrat de costat 7 cm. A continuació dibuixam un altre quadrat de costat 5 cm que talla els dos primers quadrats, tal com es veu a la figura. Quina és la diferència entre l'àrea ratllada del quadrat gran i el total de la part grisa?



A) 0 cm^2 B) 10 cm^2 C) 11 cm^2 D) 15 cm^2
E) És impossible de determinar.

---

25. En Sergi dispara a una diana. Només encerta en el 5, el 8 i el 10. En Sergi ha encertat en el 8 i en el 10 el mateix nombre de vegades. En total suma 99 punts, i el 25 % dels trets no han pegat en la diana. Quants trets ha disparat en Sergi?

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

---

26. En un quadrilàter convex $ABCD$ amb $AB = AC$, es coneixen els següents angles: $\widehat{BAD} = 80°$, $\widehat{ABC} = 75°$, $\widehat{ADC} = 65°$. Quant fa l'angle $\widehat{BDC}$?

A) 10° B) 15° C) 20° D) 30° E) 45°

---

27. Fa set anys, l'edat de n'Aina era un nombre múltiple de 8 i d'aquí a vuit anys serà múltiple de 7. Fa vuit anys, l'edat d'en Rafel era un nombre múltiple de 7 i d'aquí a set anys serà múltiple de 8. Quina d'aquestes afirmacions és certa?

A) En Rafel és dos anys més gran que n'Aina.
B) En Rafel és un any més gran que n'Aina.
C) En Rafel i n'Aina són de la mateixa edat.
D) En Rafel és un any més petit que n'Aina.
E) En Rafel és dos anys més petit que n'Aina.

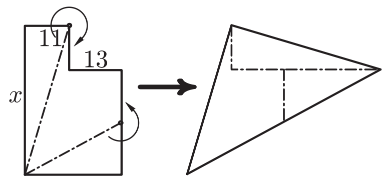
28. En l'expressió

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$$

cada lletra representa un nombre enter i positiu d'una sola xifra, i lletres diferents corresponen a nombres diferents. Quin és el mínim valor enter de l'expressió?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

29. La figura és formada per dos rectangles. S'han marcat les longituds de dos costats: 11 i 13. Hem tallat la figura en tres trossos i els hem reordenat per formar un triangle. Quina és la longitud del costat x?



A) 41 B) 40 C) 39 D) 38 E) 37

30. En Marc juga a un joc d'ordinador en què hi ha una graella 4×4. Quan clica sobre una casella, aquesta gira i mostra el seu color amagat que pot ser blau o vermell. En el conjunt de les setze caselles sols n'hi ha dues de color blau que, a més, tenen un costat en comú. Quin és el nombre mínim de tirades que ha de fer en Marc per tenir a la pantalla les dues caselles blaves?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

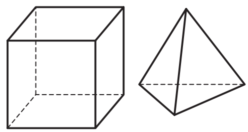
Cangur SCM 2011 (24 març) Nivell 2

Qüestions de 3 punts

1. Quin dels valors següents és el major?

A) 2011^1 B) 1^{2011} C) 1×2011 D) $1 \div 2011$ E) $1 + 2011$

2. Elsa juga amb cubs i tetràedres. Té 6 cubs i 4 tetràedres. Quantes cares hi ha en total?



A) 42 B) 48 C) 50 D) 52 E) 56

3. En un pas zebra hi ha franges blanques i negres, totes d'amplada 60 cm. En una carretera, el pas comença i acaba amb una franja blanca. Este pas té 9 franges blanques. Quina és l'amplada de la carretera?

A) 5,4 m B) 10,2 m C) 10,8 m D) 11,4 m E) Un altre valor

4. Calculeu el valor de la suma algebraica

$$111 - 110 - 109 + 108 + 107 - 106 - 105 + 104 + 103 - \cdots + 4 + 3 - 2 - 1$$

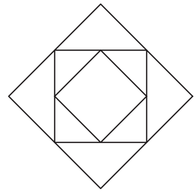
(Els signes $+$, $+$ i $-$, $-$ es van alternant.)

A) Un nombre més petit que -1
B) -1
C) 0
D) 1
E) Un nombre més gran que 1

5. El meu rellotge digital marca les 20.11. Quants minuts falten per a la propera volta que mostre les xifres 0, 1, 1 i 2 en algun ordre?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

6. La figura mostra tres quadrats. El quadrat mitjà uneix els punts mitjans del quadrat gran. El quadrat petit uneix els punts mitjans del quadrat mitjà. L'àrea del quadrat petit de la figura és de 5 cm^2. Quina és la diferència entre l'àrea del quadrat gran i l'àrea del quadrat mitjà en cm^2?



A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

7. El meu carrer té 15 cases. Jo visc en el número 10, que és la darrera casa del costat dels números parells. El meu cosí viu en l'última casa de l'altre costat. Quin número té casa seva?

A) 7 B) 9 C) 15 D) 19 E) 21

8. El gat Fèlix caça 12 peixos en 3 dies. Cada dia agafe més peixos que el dia anterior i el tercer dia n'agafe menys que en els dos primers dies junts. Quants peixos agafe el gat Fèlix el tercer dia?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9. De tots els nombres de tres xifres, la suma de les quals és 9, es trien el més gran i el més petit. Quant sumen?

A) 1000 B) 916 C) 1001 D) 907 E) 1008

10. Alícia sempre diu mentides en dilluns, en dimecres i en dijous, mentre que la resta de dies de la setmana, sempre diu la veritat. Pau sempre diu mentides en dijous, en divendres i en dissabte, mentre que la resta de dies de la setmana, sempre diu la veritat. Un dia, Alícia diu: *"Avui és dilluns"* i Pau ho confirma: *"És veritat!"*. Quin dia de la setmana era?

A) Diumenge B) Dilluns C) Dimecres D) Dijous E) Un altre

Qüestions de 4 punts

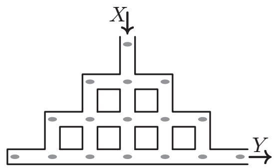
11. El resultat de l'operació $\dfrac{201{,}1 \cdot 20{,}11}{2011 \cdot 2{,}011}$ és:

A) 100 B) 0,01 C) 10 D) 0,1 E) 1

12. Maria té nou perles que pesen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 grams, respectivament. En fa quatre anells amb dues perles cadascun. El pes de les perles d'estos quatre anells és de 17, 13, 7 i 4 grams. Quant pesa la perla que queda?

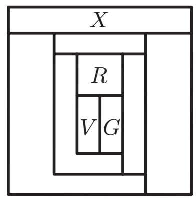
A) 1 g B) 2 g C) 3 g D) 4 g E) 5 g

13. Hem de recórrer un laberint entrant per X i eixint per Y sense passar més d'una volta pel mateix lloc. En cada cruïlla hi ha una pedreta, tal com es veu en el dibuix. Quin és el nombre màxim d'aquestes pedretes que podem agafar en recórrer el laberint?



A) 7 B) 8 C) 11 D) 13 E) 15

14. Cal pintar cada regió del diagrama amb un dels quatre colors següents: roig (R), verd (V), blau (B) i groc (G). Dues regions veïnes han de ser de colors diferents. Per tant, el color de la regió X ha de ser:

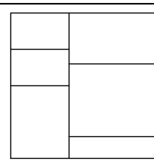


A) Roig B) Blau C) Verd D) Groc
E) No és possible determinar-lo.

15. De la llista de qualificacions següent: 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 i 16, quines dues qualificacions es poden suprimir sense canviar-ne la mitjana aritmètica?

A) 10 i 14 B) 12 i 17 C) 9 i 16 D) 10 i 12 E) 5 i 17

16. Tenim un full de paper quadrat i el tallem en sis rectangles, com es mostra en la figura. La suma dels perímetres dels sis rectangles és 160 cm. Quina és l'àrea del full de paper quadrat?



A) 64 cm^2 B) 256 cm^2 C) $\dfrac{25600}{49}$ cm^2 D) 400 cm^2
E) No es pot determinar l'àrea només a partir dels perímetres.

17. En tres partits de futbol, la nostra selecció va marcar 3 gols i en va encaixar 1. D'aquests partits, en va guanyar un, en va empatar un altre, i en va perdre el tercer. Quin va ser el resultat del partit que va guanyar?

A) 3-0 B) 2-0 C) 1-0 D) 2-1 E) 0-1

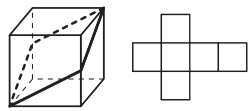
18. Laia dibuixe un segment DE de longitud 2 en un tros de paper. Quants punts diferents F pot dibuixar en el paper de manera que el triangle DEF siga rectangle i d'àrea 1?

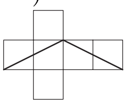
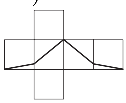
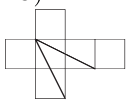
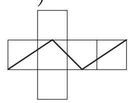
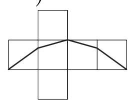
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

19. El nombre positiu a és més petit que 1, i el nombre b és més gran que 1. Quin dels nombres següents és el més petit?

A) $\dfrac{a}{b}$ B) b C) $a \times b$ D) $a + b$
E) La resposta depèn dels valors de a i b.

20. Es construeix un cub a partir del desplegament mostrat. Observeu la línia dibuixada que divideix la superfície del cub en dues parts iguals. Com es veu aquesta línia en el cub desplegat?



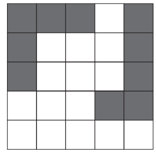
A)

B)

C)

D)

E)


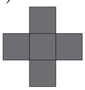
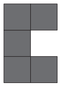
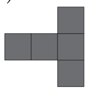
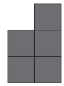
Qüestions de 5 punts

21. El nombre de cinc xifres $\overline{24X8Y}$ és divisible per 4, 5 i 9. Quines són les xifres X i Y?

A) $X = 4$, $Y = 9$
B) $X = 9$, $Y = 4$
C) $X = 4$, $Y = 0$
D) $X = 2$, $Y = 2$
E) $X = 0$, $Y = 4$

22. En un tauler quadriculat de mida 5×5 hi tenim col·locades dues peces, tal com es veu en el dibuix. Quina de les altres cinc peces es pot col·locar en una certa posició en el tauler, orientada com es veu o girada, de manera que impedisca posar-n'hi cap altra? (S'entén que dues peces no es poden superposar.)



A)  B)  C)  D)  E) 

23. Quin és el nombre màxim de xifres, totes diferents, que pot tenir un nombre enter positiu perquè el nombre sia divisible per cadascuna de les seves xifres?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

24. Fent servir un plànol en què s'indica que l'escala és $1:n$, Joan ha calculat l'àrea real d'un terreny, però ho ha fet malament. De fet, Joan ha mesurat correctament l'àrea que volia en el plànol. Després, però, simplement ha multiplicat el resultat pel factor n i no pel correcte. Ara bé, Maria, que sap perfectament el procediment de càlcul, ha vist que l'àrea real, és a dir, el resultat correcte, és un 125% del resultat de Joan. A quina escala s'ha fet el plànol?

A) $1:12{,}5$ B) $1:1{,}5$ C) $1:2$ D) $1:5$ E) $1:1{,}25$

25. Un rectangle gran s'ha descompost en tres rectangles menuts. El primer fa 7×11 i el segon fa 4×8. De totes les mesures possibles del tercer rectangle, digueu quina és la que correspon a un rectangle amb l'àrea més gran possible.

A) 7×8 B) 3×4 C) 3×8 D) 1×11 E) 7×11

26. Avui, el producte de l'edat de dues tortugues, Tor i Tur, és igual a $2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$. Tot i que no sabem l'edat de cadascuna, podem assegurar que, d'aquí a un any, el producte de les edats no serà divisible per ...

A) 5 B) 6 C) 18 D) 22 E) 37

27. Joana té un dau amb una cara marcada amb un 5, dues cares marcades amb un 4 i tres cares marcades amb un 1. Joan té un altre dau igual que el de Joana. Si Joana i Joan tiren els dos daus simultàniament i sumen els punts, quina és la probabilitat del resultat que té una probabilitat més gran de sortir?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

28. En l'expressió

$$\frac{C \cdot A \cdot N \cdot G \cdot U \cdot R}{J \cdot O \cdot C}$$

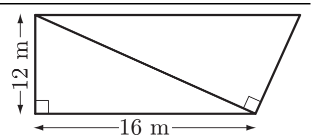
cada lletra representa un nombre enter i positiu d'una sola xifra, lletres diferents corresponen a nombres diferents i el punt volat ($\cdot$) és el signe de la multiplicació. Quin és el mínim valor enter de l'expressió?

A) 2 B) 10 C) 35 D) 1 E) Un altre valor

29. La suma dels 9 nombres primers positius més menuts és justament 100. A més d'aquesta proposició veritable, també són veritables quatre de les proposicions següents i l'altra no. Quina és la que no és correcta?

A) No podem obtenir 100 com a suma de 8 primers positius diferents.
B) Podem obtenir 100 com a suma de 7 primers positius diferents.
C) Podem obtenir 100 com a suma de 6 primers positius diferents.
D) Podem obtenir 100 com a suma de 2 primers positius, consecutius en la llista de nombres primers.
E) No podem obtenir 100 com a suma de 3 primers positius diferents.

30. Hem construït un trapezi juxtaposant dos triangles rectangles semblants, tal com es veu en la figura. Quina és, en m^2, l'àrea del trapezi?



A) 120 B) 192 C) 240 D) 246 E) 296

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi

Matt Hoogsteder Riera (Institut Pere Alsius i Torrent, Banyoles), 143.75 punts

Segons premis, ex-aequo

Pol Paniagua Seriols (IPSI, Barcelona) i
Marc Felipe Alsina (Bell-lloc del Pla, Girona), 138.75 punts

Altres premis

Maria Miró Español (Sant Ignasi, Barcelona), 135 punts
Andrés Girona San Miguel (Institut Príncep de Viana, Barcelona), 133.75 punts
David Folqué Garcia (Salesians Sant Vicenç dels Horts), 128.75 punts
Daniel Reverter Condal (Sadako, Barcelona) i
Arnau Canyadell Miquel (Institut Lacetània, Manresa), 127.5 punts
Aina Fitó Parera (Anoia, Igualada) i
Isidre Puigmitjà Rodoreda (Institut Pla de l'Estany, Banyoles), 124.75 punts
Elisabet Villalobos Guiral (Aula Escuela Europea, Barcelona), 123.75 punts
Pere Rodríguez Salleras (Bell-lloc del Pla, Girona), 123.5 punts
Ismael Gallego González (Institut Jacint Verdaguer, Sant Sadurní d'Anoia), 122.5 punts
Esteve Bramon Casademont (Institut Pere Alsius i Torrent, Banyoles) i
Pau Surrell Rafart (Institut Carles Rahola i Llorens, Girona), 121.25 punts
Marta Gil Bardají (Institut Ronda, Lleida), 121 punts
Bernat Torrents Valls (Anoia, Igualada), 119.75 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Matias Puig Cortada (Aula Escuela Europea, Barcelona), 117.5 punts
Andreu Cánovas Subirana (Institut d'Argentona, Argentona), 117.25 punts
Guillem Lluís Luengo (Jesús, Maria i Josep, Barcelona),
Jordi Rodón Rigau (Institut Castellbisbal, Castellbisbal) i
Marc Illa Bello (Sadako, Barcelona), 116.25 punts

Pere Marsinyach Torrico (Institut Sant Ramon, Cardona) i
Pau Ventura Alsina (Institut Pius Font i Quer, Manresa), 114.75 punts
Josep Alòs Pascual (Escola Pia de Balaguer, Balaguer) i
Sergi Burniol Clotet (Institut Lacetània, Manresa), 113.75 punts
Sara Bellapart Díaz (La Salle, Girona),
Guillem Cano Bergadà (Maristes La Immaculada, Barcelona),
Laia Codina Corrons (Institut Lacetània, Manresa) i
Albert Arnal Bauxel (Sant Pau, Barcelona), 112.5 punts
Martí Pons Oliver (Institut Josep Brugulat, Banyoles),
Carmen Font Mata (Fundación Escuela Suiza, Barcelona),
Adriana Balaguer Staib (Sant Pau, Barcelona),
Andrei Ilkinov Cristian (Institut Rubió i Ors, L'Hospitalet de Llobregat),
Joan Cols Rafols (Institut Eugeni d'Ors, Vilafranca del Penedès) i
Ferran Gebellí Guinjoan (Sagrat Cor de Jesús, Tarragona), 111.25 punts
Anna Espuñes Oliva (Nostra Senyora del Carme, Balaguer) i
Thaís Morales López (Santa Maria, Blanes), 110.75 punts
Miquel Navarro (Institut de Lliçà, Lliçà d'Amunt), 110.5 punts
Xavier Gavarró Busquets (Sant Nicolau, Sabadell) i
Joaquim Llorens Giralt (IPSI, Barcelona), 110 punts
Robert Seara Mora (Institut Ernest Lluch, Barcelona), 109.75 punts
Gisela Guitart Font (Institut Eugeni d'Ors, Vilafranca del Penedès), 109.25 punts
Guillem Turmo Pujol (SES Teià, Teià),
Blai Barberá Bertran (Institut Emperador Carles, Barcelona),
Germán Mora Martín (Institut Can Jofresa, Terrassa),
Manel López Melià (Institut La Garrotxa, Olot),
Eduard Feliu Sans (Institut Fonts de la Glorieta, Alcover) i
Josep Castell Queralt (Institut Manuel Sales i Ferré, Ulldecona), 108.75 punts
Xènia Sala i Pareta (Institut La Bisbal, La Bisbal d'Empordà),
Miquel Badia Bogner (Tecnos, Terrassa) i
Ignasi Traver Tarrés (Aula Escuela Europea, Barcelona), 108.5 punts
Natalie Bolón Brun (La Salle Bonanova, Barcelona), 108.25 punts
Ruben Qui Mena (Mare de Déu del Roser, Barcelona),
Maria Beatriz Benedito Barba (Infant Jesús, Barcelona),
Laia Comerma Calatayud (Escorial, Vic),
Gerard León Afuera (Institut Ramon Coll i Rodés, Lloret de Mar) i
Ricard Cuervo Saliné (Institut Joan Fuster, Barcelona), 107.5 punts
Nerea Ruiz Solaní (Institut Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat del Vallès) i
Pere Rehues Masip (Institut Lluís Domènech i Montaner, Reus), 107.25 punts

Premis. País Valencià

Primer premi

Pablo Rodrigo Ocampo (IES Francesc Ribalta, Castelló de la Plana), 138.75 punts

Segon premi

Jorge Millas Calomarde (IES Vicenta Ferrer Escrivà, València), 120 punts

Tercer premi

Guillermo Martínez López (Pío XII, València), 118.75 punts

Altres premis

Daniel Nieves Roldán (Jesús María, Orihuela), 117.5 punts
Francisco Javier Calderón Lucas (IES Pere M.Orts i Bosch, Benidorm), 116.25
Juan Vicent Camisón (IES La Plana, Castelló de la Plana), 115 punts
Saúl Fuster Navarro (IES La Vereda, La Pobla de Vallbona) i
Paula Granado Martínez (IES Violant de Casalduch, Benicàssim), 114.5 punts
Antonio Muñoz Aygües (IES La Vereda, La Pobla de Vallbona), 113.75 punts
Alexandre Morant Orquín (IES Número 26, València), 112.25 punts

Premis. Balears

Primer premi

Xim Tomàs Ferrer (IES Felanitx, Felanitx), 116 punts

Segon premi

Enric Martorell Pons (CC Pedro Poveda, Palma), 112,50 punts

Tercer premi

Joan Danús Jaume (Col·legi Sant Salvador, Artà), 110 punts

Altres premis

Jorge Gómez Marco (Col·legi La Salle, Palma), 108 punts
Màxim Mir Ferrer (IES La Ribera, Palma), 107,50 punts
Francesc Valls Mascaró (IES Guillem Cifre de Colonya, Pollença), 106,50 punts
Maria Neus Muntaner Estarellas (IES Guillem Colom Casasnovas, Sóller), 106,25 punts
David Argelich Hernández (Col·legi Sant Josep Obrer II, Palma) i
Raquel Marí Costa (IES Santa Maria dEivissa, Eivissa), 104,75 punts
Joshua James Healey (IES Guillem Cifre de Colonya, Pollença) i
Aina Barceló Lebron (IES CTEIB, Palma), 104 punts

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 2

Qüestions de 3 punts

1. B. Entre les 14 i les 15 hores.

La paraula "**CANGURET**" té 8 lletres i si l'escrivim 2011 vegades, a un segon cada lletra, trigarem 16088 segons, que dividit per 3600 dóna un nombre entre 4 i 5. Llavors, com que comença a les 10 acabarà entre les 14 i les 15 hores.

2. A. 78.

Com que un cub té 12 arestes i un tetràedre en té 6, el total d'arestes serà $12 \times 5 + 6 \times 3 = 78$

3. B. 7,5 m.

Si hi ha 8 franges blanques hi haurà 7 franges negres. L'amplada total que abasten les 15 franges serà: $15 \times 50 = 750$ cm $= 7{,}5$ m.

4. A. 2.

Si escric $12 \times 3 + 4 \times 2$ en aquesta calculadora especial, el càlcul que farà serà $12 \div 3 - 4 \div 2 = 4 - 2 = 2$.

5. C. 50.

La propera vegada serà a les 21.01 i si fem el càlcul del temps que passa entre les 20.11 i les 21.01 veurem que són 50 minuts.

6. C. 12.

L'àrea del quadrat mitjà és el doble de la del quadrat petit i l'àrea del quadrat gran és el doble de la del quadrat mitjà. La resposta és, doncs, $24 - 12 = 12$ cm^2.

7. E. 21.

Al costat dels nombres parells hi haurà 6 cases; llavors al costat dels nombres senars hi haurà $17 - 6 = 11$ cases que tindran nombres senars començant per l'1. Per tant, la darrera casa tindrà l'onzè nombre imparell, que és $2 \times 10 + 1 = 21$.

8. A. 5.

Segons l'enunciat el tercer dia ha agafat menys de la meitat dels 12 peixos, és a dir com a màxim 5. Si vas provant t'adones que els peixos que ha agafat només poden ser 3, 4 i 5.

9. B. 907.

El número més gran que compleix les condicions del problema és el 800 i el més petit és el 107. La suma demanada és 907.

10. E. 3-0.

Com que segur que el dia que va perdre és el dia que va encaixar l'únic gol, els tres resultats només poden ser 3 - 0, 0 - 0, i 0 -1. Per tant el resultat del partit que van guanyar va ser 3 - 0.

Qüestions de 4 punts

11. C. 1.

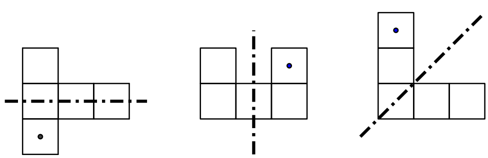
Si dividim el primer nombre del numerador pel primer nombre del denominador dóna 10, i si dividim els dos nombres finals del numerador i del denominador dóna $\frac{1}{10}$. Per tant el resultat és 1.

12. C. 3 g.

Si sumem el pes de totes les perles obtenim 45 g i si sumem les perles dels quatre anells dóna 42 g. Llavors la perla que queda pesa 3 g.

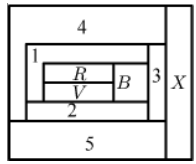
13. C. 3.

Perquè pugui aparèixer un eix de simetria, el nou quadrat haurà de ser de la mateixa mida i situat amb els eixos paral·lels als que ja es veuen, i amb un costat juxtaposat a algun d'ells. Si examinem totes les possibles posicions veurem que n'hi ha tres que compleixen l'enunciat; s'ha dibuixat l'eix de simetria i s'ha indicat amb un • quin és el quadrat afegit. Per una altra posició hi ha centre de simetria, però no eix de simetria.



14. A. Roig.

Mirant regions que toquen a tres que són de colors diferents podem veure successivament que la regió indicada amb un 1 ha de ser groga; la indicada amb un 2 ha de ser roja; la regió 3, verda; la regió 4, blava; la regió 5 ha de ser groga i i en conseqüència la X ha de ser roja.

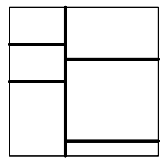


15. E. 14 i 10.

La mitjana dels 8 números és 12. Llavors els dos números que es poden treure sense que varïi la mitjana han de ser dos que tinguin també de mitjana 12, és a dir que han de sumar 24. Només poden ser el 10 i el 14.

16. D. 144 cm^2.

Quan mesurem el perímetre dels 6 rectangles hi ha costats que s'han de comptar dues vegades (en concret tots els que s'han remarcat més gruixuts a la figura), són els que corresponen als segments per on tallem. Aleshores es pot veure que la suma dels perímetres dels 6 rectangles és igual a 10 vegades la longitud del costat del quadrat inicial. Si anomenem a aquesta longitud tindrem $10a = 120$, és a dir $a = 12$ i l'àrea demanada serà de 144 cm^2.



17. E. 4018.

Si sumen el primer sumand de la primera suma amb el primer sumand de la segona veiem que el resultat és 2. El mateix succeeix amb la suma dels segons sumands, amb la dels tercers sumands, etc., fins a arribar a la suma dels termes que estan al lloc 2009. Per tant el resultat serà $2 \times 2009 = 4018$.

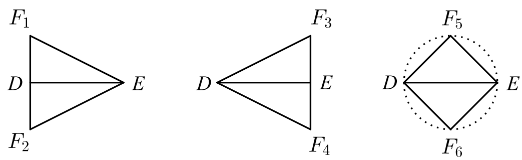
18. C. 6.

Hi ha 6 punts F del pla per a aconseguir triangles DEF que siguin rectangles d'àrea 1. Si prenem $DE = 2$ com a base, l'altura ha de ser 1. Aleshores trobem:

• Dos punts F de forma que el segment DF sigui perpendicular a DE i de longitud 1, un per sobre i un per sota de D.

• El mateix amb dos punts F per sobre i per sota de E.

• Finalment, dos altres punts F sobre la circumferència de diàmetre DE que formen un triangle rectangle isòsceles d'altura sobre la hipotenusa igual a 1.

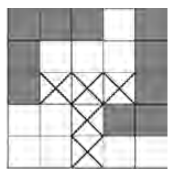


19. D. $a + b$.

El valor més gran és $a + b$ perquè és més gran que a i més gran que b. Com que $a < 1$ aleshores $a \times b < b$; com que $b > 1$ aleshores $\frac{a}{b} < a < b$. De $a > 0$ es dedueix $b < a + b$. El raonament que hem fet val per nombres $a < 1$ i $b > 1$ qualssevol és a dir que la resposta no és E).

20. D..

Com que l'enunciat ens diu que podem col·locar la peça, sense restriccions, amb l'objectiu d'impedir posar-n'hi cap altra, podeu veure que ho aconseguim amb la peça D situada com es veu a la figura.



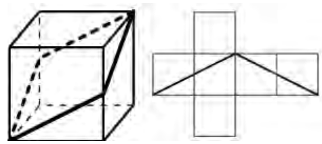
Qüestions de 5 punts

21. E. 4.

Perquè $\overline{24X8Y}$ sigui divisible per 5 i per 4 la Y ha de ser 0 i aleshores perquè $\overline{24X80}$ sigui divisible per 9, $14 + X$ ha de ser múltiple de 9. Per tant $X = 4$ i $X + Y = 4$.

22. A.

Hi ha d'haver dos segments i només dos que passin pel punt mitjà de dues arestes. Aquesta condició la compleixen els desenvolupaments A) i E), però com que les dues arestes indicades no han de ser de la mateixa cara, la resposta només pot ser A). Un examen detallat ens permet assegurar que sí que és una solució totalment correcta.



23. B. En Max.

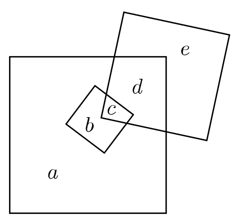
Estudiem primer el problema imaginant que els tres nius, que indicarem M, I, O estan alineats. Si M pertanyés al segment IO aleshores l'Isaac i l'Òscar mentirien i no es compliria l'enunciat que afirma que com a mínim dos ocells diuen la veritat. Si O pertanyés al segment IM o bé I pertanyés al segment OM aleshores podria ser que l'Isaac i l'Òscar diguessin la veritat i en Max mentís.

Per analitzar la situació si els tres nius formen un triangle, indiquem com $a = \overline{IM}$, $b = \overline{MO}$ i $c = \overline{OI}$ les distàncies entre els tres nius, longituds dels tres costats del triangle. L'Isaac diu que $a > 2c$; en Max diu que $b > 2a$ i l'Òscar diu que $b > 2c$. Si fossin certes les afirmacions d'en Max i de l'Isaac tindríem que $b > 2a = a + a > a + 2c > a + c$, cosa que no es pot donar en un triangle. Semblantment veuríem que no poden ser certes les afirmacions d'en Max i de l'Òscar. En canvi no és difícil trobar un exemple en el qual l'Isaac i l'Òscar diguin la veritat però en Max menteixi (penseu en $a = 5$, $b = 5$ i $c = 1$).

És a dir, si sabem que dos diuen la veritat, deduim en tots els casos que en Max menteix.

24. D. 15 cm^2.

Si indiquem amb a, b, c, d, e les àrees de les cinc regions de la figura podem comprovar que $a + b + c + d = 49(*)$, que $b + c = 9(**)$ i que $c + d + e = 25(* * *)$. Si restem de l'equació (*) la suma de (**)+(***) obtenim $a - (c + e) = 15$ i això és el que demanava l'enunciat.

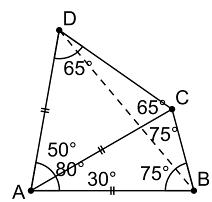


25. D. 20.

99 ha de ser un múltiple de 18 $(10+8$ punts) més un múltiple de 5. Això només s'aconsegueix amb $99 = 3\times 18 + 9\times 5$, cosa que representa 3 encerts de 8 punts, 3 encerts de 10 punts i 9 encerts de 5 punts, és a dir 15 trets. Com que aquests $15 = \dfrac{75}{100}n$, on n és el total de trets que ha disparat, resulta $n = 20$.

26. B. $15°$.

El triangle ABC és isòsceles perquè $AB = AC$; això ens permet calcular-ne tots els angles, un igual al de $75°$ que ja coneixíem i l'altre, que és de $30°$. Així podem conèixer $\widehat{CAD} = 80° - 50° = 30°$ i a partir d'aquí, en el triangle ACD veiem que l'altre angle és $\widehat{DCA} = 65°$ i, doncs, el triangle ACD també és isòsceles i, per tant, $AB = AC = AD$. Veiem doncs que el triangle ABD també és isòsceles, amb angle desigual de 80. Els altres angles (que no estan marcats a la figura) són de $50°$ i, per tant, l'angle demanat és $\widehat{BDC} = \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = 65° - 50° = 15°$.



27. A. En Rafel és dos anys més gran que n'Aina.

Si indiquem com a l'edat de n'Aina, l'enunciat ens diu que $a = 8x + 7 = 8x + 8 - 1 = 8(x+1) - 1$ i que $a = 7y - 8 = 7y - 7 - 1 = 7(y-1) - 1$ és a dir que $a + 1$ és, alhora, múltiple de 7 i múltiple de 8. Per tant $a + 1$ pertany al conjunt $\{56, 112, ...\}$ i a és un dels valors $\{55, 111, ...\}$.

Si raonem de manera anàloga amb l'edat r d'en Rafel veurem que $r - 1$ és, alhora, múltiple de 7 i múltiple de 8. Per tant $r - 1$ és múltiple de 56 i r és un dels valors $\{57, 113, ...\}$.

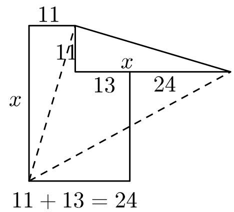
Si observem les opcions de resposta proposades (i pensem només en les edats habituals en la majoria absoluta de la població) veurem que ha de ser que Rafel tingui dos anys més que n'Aina.

28. B. 2.

Comencem per observar que $G{\cdot}A$ no influeixen en el resultat; se simplifiquen. Si volem el mínim valor per a l'expressió hem de pensar que M i E prenguin els màxims valors possibles, 8 i 9, però també hem de veure si es pot complir el que diu l'enunciat, que el resultat sigui enter i, alhora, fent servir els nombres més petits possible per al numerador. Això ho aconseguim posant $O = 1$ i, com que un 5 al numerador no es podria simplificar per tal que el resultat fos enter, $\{K, A, N, R\} = \{2, 3, 4, 6\}$.

29. E. 37.

Per les dades veiem que el costat inferior fa 24. El triangle que té un catet igual a x s'ha de girar 270° en sentit horari com indica la fletxa per posar-lo en la posició final del trencaclosques. A l'altre triangle rectangle li fem una simetria central. Podeu veure les mesures resultants a la figura i es dedueix que $x = 13 + 24 = 37$



30. B. 10.

Si marquem les files amb **A, B, C, D** i les columnes amb **1, 2, 3, 4** com es fa habitualment en el joc dels vaixells podem procedir així com a millor estratègia:

• Marcarem successivament les 6 caselles **(A,2), (B,3), (C,4), (B,1), (C,2), (D,3)**.

• Si en una d'aquestes trobem una casella blava, com a màxim amb 4 tirades més (les caselles adjacents a aquella que és blava, que en algun cas només són 3) haurem pogut marcar ja la segona casella blava.

• Altrament, marcaríem **(A,4), (D,1)**, una d'aquestes dues caselles seria la primera blava i, en cada cas, només en queden dues d'adjacents on segur que hi ha l'altra casella blava.

Es veu, doncs, que sempre amb 10 tirades ja podem tenir a la vista les dues caselles blaves.

Cangur SCM 2011 (24 març) Nivell 2

Qüestions de 3 punts

1. E. 1 + 2011.

Els valors dels nombres que apareixen a les opcions de resposta són, respectivament, 2011, 1, 2011, un nombre decimal més petit que 1, i 2012. Aquest és, doncs, el més gran dels cinc nombres.

2. D. 52.

Com que un cub té 6 cares i un tetràedre en té 4, el total de cares serà $6 \times 6 + 4 \times 4 = 52$

3. B. 10,2 m.

Si hi ha 9 franges blanques hi haurà 8 franges negres. L'amplada total que abasten les 17 franges serà: $17 \times 60 = 1020$ cm $= 10{,}2$ m.

4. C. 0.

Si sumem per parelles en

$$111 - 110 - 109 + 108 + 107 - 106 - 105 + 104 + 103 - \cdots + 4 + 3 - 2$$

és a dir, els 110 primers termes de l'expressió (deixant a part el -1 final) obtenim

$$+1 - 1 + 1 - 1 + \cdots - 1 + 1 - 1 + 1$$

i com que hi ha 55 sumands el resultat fins aquí és $+1$. Si li sumem el -1 final el resultat és 0.

5. B. 50.

La propera vegada serà a les 21.01 i si fem el càlcul del temps que passa entre les 20.11 i les 21.01 veurem que són 50 minuts.

6. B. 10.

L'àrea del quadrat mitjà és el doble de la del quadrat petit i l'àrea del quadrat gran és el doble de la del quadrat mitjà. La resposta és, doncs, $20 - 10 = 10$ cm^2.

7. D. 19.

Al costat dels nombres parells hi haurà 5 cases; llavors al costat dels nombres senars hi haurà $15 - 5 = 10$ cases que tindran nombres senars començant per l'1. Per tant, la darrera casa tindrà el desè nombre imparell, que és $2 \times 9 + 1 = 19$.

8. A. 5.

Segons l'enunciat el tercer dia ha agafat menys de la meitat dels 12 peixos, és a dir com a màxim 5. Si vas provant t'adones que els peixos que ha agafat només poden ser 3, 4 i 5.

9. E. 1008.

El número més gran que compleix les condicions del problema és el 900 i el més petit és el 108. La suma demanada és 1008.

10. D. Dijous.

Si Alícia diu *"Avui és dilluns"*, com que els dilluns sempre diu mentides, segur que està mentint. Com que Pau ho confirma, Pau també està mentint. L'únic dia que menteixen tots dos és el dijous.

Qüestions de 4 punts

11. E. 1.

Si dividim el segon nombre del numerador pel segon nombre del denominador dóna 10, i si dividim els dos nombres inicials del numerador i del denominador dóna $\frac{1}{10}$. Per tant el resultat és 1.

12. D. 4 g.

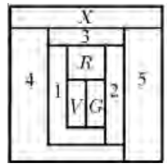
Si sumem el pes de totes les perles obtenim 45 g i si sumem les perles dels quatre anells dóna 41 g. Llavors la perla que queda pesa 4 g.

13. D. 13.

Hi ha dos camins que permeten arreplegar 13 pedretes i no n'hi ha cap que permeti agafar-ne més.

14. C. Verd.

Mirant regions que toquen a tres que són de colors diferents podem veure successivament que la regió indicada amb un 1 ha de ser blava; la indicada amb un 2 ha de ser verda; la regió 3, groga; la regió 4, roja; la regió 5 ha de ser blava i per tant la X ha de ser verda.

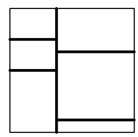


15. A. 10 i 14.

La mitjana dels 8 números és 12. Llavors els dos números que es poden treure sense que varïi la mitjana han de ser dos que tinguin també de mitjana 12, és a dir que han de sumar 24. Només poden ser el 10 i el 14.

16. B. 256 cm^2.

Quan mesurem el perímetre dels 6 rectangles hi ha costats que s'han de comptar dues vegades (en concret tots els que s'han remarcat més gruixuts a la figura), són els que corresponen als segments per on tallem.



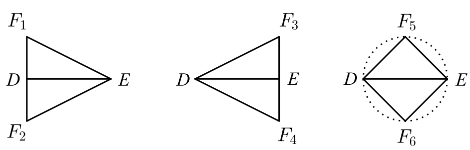
Aleshores es pot veure que la suma dels perímetres dels 6 rectangles és igual a 10 vegades la longitud del costat del quadrat inicial. Si anomenem a aquesta longitud tindrem $10a = 160$, $a = 16$ i l'àrea serà de 256 cm^2.

17. A. 3-0.

Com que segur que el dia que va perdre és el dia que va encaixar l'únic gol, els tres resultats només poden ser 3 - 0, 0 - 0, i 0 -1. Per tant el resultat del partit que van guanyar va ser 3 - 0.

18. B. 6.

Hi ha 6 punts F del pla per a aconseguir triangles DEF que siguin rectangles d'àrea 1. Si prenem $DE = 2$ com a base, l'altura ha de ser 1. Aleshores trobem dos punts F de forma que el segment DF sigui perpendicular a DE i de longitud 1, un per sobre i un per sota de D; el mateix amb dos punts F per sobre i per sota de E i, finalment, dos punts F sobre la circumferència de diàmetre DE donen un triangle rectangle isòsceles d'altura sobre la hipotenusa igual a 1.



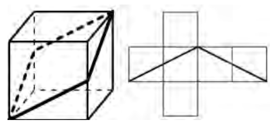
19. A. $\dfrac{a}{b}$.

Com que $b > 1$ aleshores $\dfrac{a}{b} < a < 1 < b < a + b$.

Com que $b > 1$ també podem assegurar que $\dfrac{a}{b} < a \times b$. El raonament que hem fet val per nombres $a < 1$ i $b > 1$ qualssevol, no depèn dels valors concrets.

---

20. A.



Hi ha d'haver dos segments i només dos que passin pel punt mitjà de dues arestes. Aquesta condició la compleixen els desenvolupaments A) i E), però com que les dues arestes indicades no han de ser de la mateixa cara, la resposta només pot ser A). Un examen detallat ens permet assegurar que sí que és una solució totalment correcta.

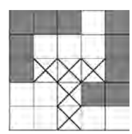
Qüestions de 5 punts

21. C. $X = 4$, $Y = 0$.

Perquè $\overline{24X8Y}$ sigui divisible per 5 i per 4 la Y ha de ser 0 i aleshores perquè $\overline{24X80}$ sigui divisible per 9, $14+X$ ha de ser múltiple de 9. Per tant $X = 4$.

---

22. C).



Com que l'enunciat ens diu que podem col·locar la peça, sense restriccions, amb l'objectiu d'impedir posar-n'hi cap altra, podeu veure que ho aconseguim amb la peça **C** situada com es veu a la figura.

---

23. D. 7.

El 0 no pot aparèixer al nombre que cerquem. No hi podran anar el 2 i el 5 alhora i, doncs, no hi anirà el 5 perquè si no hi va el 2 perdem possibilitats. Com que $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$ per aconseguir divisibilitat per 9 (i per 3 i per 6) podem treure el 4. Hi ha nombres formats amb les 7 xifres 1, 2, 3, 6, 7, 8 i 9 divisibles per cadascuna de les seves xifres. Busquem un múltiple de 8 i després, per tempteig, que sigui múltiple de 7. Entre molts altres, el nombre més petit de 7 xifres que compleix l'enunciat és 1289736; el més gran és 9867312.

---

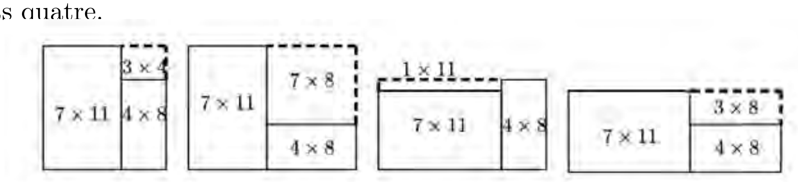
24. A. $1:1{,}25$.

Maria sap que la raó de les àrees és el quadrat de la raó de semblança, que és el que ens dóna l'escala. Com que Joan ha multiplicat per n en comptes de multiplicar per n^2 podem saber que per passar del resultat de Joan al correcte cal multiplicar per n. Si això representa el 125% és que estem multiplicant per $n = 1{,}25$.

25. A. 7×8.

Gràficament és fàcil arribar a la conclusió que amb dos rectangles de 7×11 i un de 4×8 no podem compondre un rectangle. Tanmateix també ho podeu veure numèricament perquè $77 + 77 + 32 = 186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$ i amb els tres rectangles indicats no arribem a compondre un rectangle amb un costat de 31 o més gran, que és el que necessitaríem.

A la figura següent es mostra que les altres quatre opcions de resposta corresponen als quatre possibles rectangles que es poden compondre amb els dos que tenim i un altre. És clar que el de 7×8 és el d'àrea més gran de tots quatre.



26. D. 22.

Pot ser-ho per 5 si hui tenen (entre altres possibilitats) $2^2 \cdot 3$ i $3^2 \cdot 11$ anys.
Pot ser-ho per 6 i per 37 si tenen $2^2 \cdot 3^3$ i 11 anys.
Pot ser-ho per 18 en cas que tinguen $2^2 \cdot 11$ i 3^3 anys.
Cap de les parelles a, b de divisors que compleixen $a \cdot b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$ no compleix que $(a + 1) \cdot (b + 1)$ sigui divisible per 22.

27. C. $\frac{1}{3}$.

Possiblement la manera més ràpida de trobar la probabilitat dels resultats que poden aparèixer quan fem la suma de les puntuacions dels dos daus és amb una taula de doble entrada. D'esta manera observem 36 situacions equiprobables, de les quals el 5 és el valor que apareix més, 12 vegades. La probabilitat d'obtenir un 5 és, doncs, $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

	5	4	4	1	1	1
5	10	9	9	6	6	6
4	9	8	8	5	5	5
4	9	8	8	5	5	5
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2

28. B. 2.

Comencem per observar que la C no influeix en el resultat de l'expressió perquè se simplifica. Si volem obtenir el mínim valor hem de pensar que J i O prenguin els màxims valors possibles, 8 i 9. Tanmateix hem de vore si aixina es pot complir el que diu l'enunciat, que el resultat sigui enter i, alhora, fent servir els nombres més petits possible per al numerador. Com que un 5 al numerador no es podria simplificar per tal que el resultat fos enter, haurem de prendre $\{A, N, G, U, R\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ i el resultat de l'expressió de l'enunciat és 2.

29. E. No podem obtenir 100 com a suma de 3 nombres primers positius diferents.

La frase E) no és correcta: $100 = 2 + 19 + 79$.

A partir del fet que la suma dels 9 nombres primers positius més menuts és justament 100, és a dir $100 = 2+3+5+7+11+13+17+19+23$ podem raonar que A) és correcta perquè per sumar 8 nombres primers que donin 100 no hi podria haver el 2; per aplegar a 100 hauríem de treure'n un dels que hi ha i posar-ne un de més gran i com que el següent primer després del 23 és el 29, sempre 8 nombres primers imparells sumen més de 100.

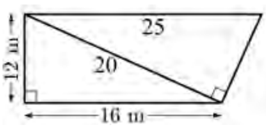
B) és correcta: $100 = 2+3+5+7+11+13+(17+19+23) = 2+3+5+7+11+13+59$.

C) és correcta: $100 = (2+3+5+7)+11+13+(17+19)+23 = 17+11+13+7+29+23$.

Finalment, D) és correcta. Hem de buscar els dos primers més propers a 50, un per dalt i l'altre per baix: $100 = 47 + 53$.

30. D. 246.

La hipotenusa del triangle rectangle del qual coneixem els dos catets és $\sqrt{12^2+16^2} = 20$. Aquest segment és també el catet gran de l'altre triangle rectangle i, doncs, la raó de semblança és $r = \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{4}$. Per tant la hipotenusa d'aquest altre triangle (que és la base major del trapezi) té una mesura de $\dfrac{5}{4} \cdot 20 = 25$ i l'àrea del trapezi serà $A = \dfrac{16+25}{2} \cdot 12 = 246$ m^2.



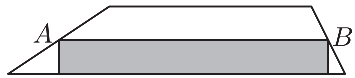
Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 3

Qüestions de 3 punts

1. En un pas zebra hi ha franges blanques i negres, totes de 50 cm d'amplada. En una carretera, el pas comença i acaba amb una franja blanca i té 8 franges blanques. Quina és l'amplada de la carretera?

A) 7 m B) 7,5 m C) 8 m D) 8,5 m E) 9 m

2. El rectangle de la figura té una àrea de 13 cm^2. A i B són els punts mitjans dels costats del trapezi. Quina és l'àrea del trapezi?

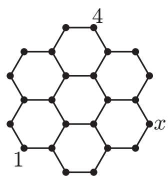


A) 24 cm^2 B) 25 cm^2 C) 26 cm^2 D) 27 cm^2 E) 28 cm^2

3. Si $S_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$, $S_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2$ i $S_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, quina de les relacions següents és certa?

A) $S_2 < S_1 < S_3$
B) $S_1 < S_2 = S_3$
C) $S_1 < S_2 < S_3$
D) $S_3 < S_2 < S_1$
E) $S_1 = S_2 < S_3$

4. En la figura de la dreta s'ha de col·locar un nombre en cadascun dels punts •, de manera que la suma dels nombres que es troben en els extrems de cada segment sigui la mateixa. Ja hi ha col·locats dos d'aquests nombres. Quin valor tindrà x ?



A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 24

5. Si dividim 2011 entre un determinat nombre enter i positiu, el residu és 1011. Quin dels nombres següents és el divisor?

A) 100 B) 500 C) 1000 D) Un altre nombre
E) No és possible obtenir aquest residu.

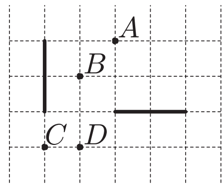
6. Un mosaic rectangular d'àrea 360 cm^2 és fet amb peces quadrades, totes de la mateixa mida. El mosaic fa 24 cm de llargada per 5 peces d'amplada. Quina és l'àrea de cada peça en cm^2?

A) 1 B) 4 C) 9 D) 16 E) 25

7. Fem una llista, en ordre descendent, de tots els números de quatre xifres pels quals la suma de les seves xifres és igual a 4. En quina posició d'aquesta llista hi ha el número 2011?

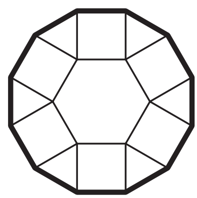
A) 6a B) 7a C) 8a D) 9a E) 10a

8. Cadascun dels dos segments del dibuix s'ha obtingut a partir de l'altre mitjançant una rotació. Quins dels punts indicats poden ser el centre d'aquesta rotació?



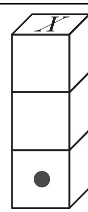
A) A i D B) A i C C) Només A D) Només D
E) A, B, C i D

9. El dibuix mostra una figura formada per un hexàgon regular en què cada costat fa una unitat, sis triangles i sis quadrats. Quin és el perímetre de la figura?



A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ B) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C) 12
D) $6+3\sqrt{2}$ E) 9

10. La figura mostra tres daus convencionals, un damunt l'altre. Un dau convencional té la propietat que el nombre de punts de dues cares oposades sumen 7. A la figura, la suma dels punts de qualsevol parell de cares que es toquen és 5. Quants punts hi ha en la cara de dalt de tot, marcada amb una X?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Qüestions de 4 punts

11. Un mes té cinc dilluns, cinc dimarts i cinc dimecres. El mes anterior només tenia quatre diumenges. El mes següent tindrà:

A) Exactament, quatre divendres
B) Exactament, quatre dissabtes
C) Cinc diumenges
D) Cinc dimecres
E) La situació és impossible.

12. Tres esportistes, la Isabel, l'Agnès i la Hana, van participar en una cursa. Just després de la sortida, la Isabel anava primera, l'Agnès segona i la Hana tercera. Durant la cursa la Isabel i l'Agnès es van avançar l'una a l'altra nou vegades, l'Agnès i la Hana deu vegades, i la Isabel i la Hana onze vegades. En quin ordre van arribar a la meta?

A) Isabel, Agnès, Hana
B) Agnès, Hana, Isabel
C) Hana, Isabel, Agnès
D) Hana, Agnès, Isabel
E) Agnès, Isabel, Hana

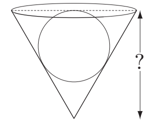
13. Suposeu que n compleix que $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$. Quin és el valor de n?

A) 1005 B) 1006 C) 2010 D) 2011
E) Cap de les respostes anteriors no és vàlida.

14. Tenim dos cubs els costats dels quals mesuren a dm i $a + 1$ dm respectivament. El cub gros és ple d'aigua i el menut és buit. Aboquem aigua del cub gros al cub menut fins que aquest s'ompli, i queden 217 litres en el cub gros. Quina quantitat d'aigua hem abocat al cub menut?

A) 243 L B) 729 L C) 125 L D) 1331 L E) 512 L

15. Una bola de radi 15 ha caigut dins d'un forat en forma de con i hi ha quedat perfectament ajustada, com es mostra en la figura. Si el forat cònic es mira des d'un costat, es veu un triangle equilàter. Quina profunditat té el forat?



A) $30\sqrt{2}$ B) $25\sqrt{3}$ C) $60\left(\sqrt{3}-1\right)$ D) 60 E) 45

16. Els quadrats d'aquest enreixat 4×4 es pinten de blanc o de negre. Els números que hi ha a la dreta de cada fila i sota de cada columna de l'enreixat indiquen el nombre de quadrats de color negre que hi ha a la respectiva fila o columna. De quantes maneres es pot pintar un enreixat d'aquesta forma?

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 9

17. Quina és la quantitat màxima de nombres consecutius de tres xifres que tenen, com a mínim, una xifra senar?

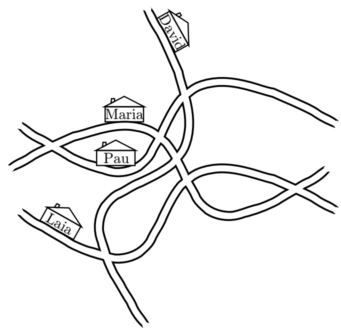
A) 1 B) 10 C) 110 D) 111 E) 221

18. En Miquel vol escriure nombres enters i positius en les cel·les de la taula 3×3 de manera que la suma dels quatre nombres de cada quadrat 2×2 sigui 10. Ja ha escrit cinc nombres a la taula, tal com es mostra en la figura. Quina és la suma dels altres quatre nombres?

1		2
	2	
4		5

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

19. La Joana, encara que no sap dibuixar gaire bé, ha intentat esbossar un mapa del seu poble. Ha dibuixat quatre avingudes amb els set encreuaments corresponents i les cases dels seus amics, però, en realitat, l'avinguda Fletxa, l'avinguda Clau i l'avinguda del Regle són totes avingudes rectes. La quarta avinguda és l'avinguda Corba. Quin dels amics de la Joana viu a l'avinguda Corba?



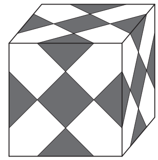
A) La Laia B) En Pau C) La Maria D) En David
E) No ho podem saber només mirant el dibuix que ha fet la Joana

20. Els nombres x i y són ambdós més grans que 1. Quina de les fraccions següents té el valor més gran?

A) $\dfrac{x}{y+1}$ B) $\dfrac{3x}{3y+1}$ C) $\dfrac{2x}{2y+1}$ D) $\dfrac{2x}{2y-1}$ E) $\dfrac{x}{y-1}$

Qüestions de 5 punts

21. L'Anna tenia un cub blanc d'aresta 1 dm. Hi va enganxar uns quadrats negres, tots de la mateixa mida, de manera que les cares del cub van quedar decorades totes iguals, tal com es pot veure en la figura. Quants cm^2 té la part negra de la superfície del cub?

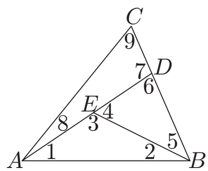


A) 37,5 B) 150 C) 225 D) 300 E) 375

22. Diem que un número de cinc xifres $\overline{abcde}$ és *interessant* si totes les seves xifres són diferents i, a més, $a = b + c + d + e$. Quants nombres interessants hi ha?

A) 72 B) 144 C) 168 D) 216 E) 288

23. El professor ens demana que dibuixem un triangle ABC, que escollim un punt D del costat BC i que dibuixem el segment AD, que escollim ara un punt E del segment AD i que dibuixem el segment BE. D'aquesta manera es formen els nou angles indicats en la figura.



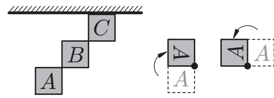
Però, un company nostre diu: *«La meva construcció és la que té el mínim nombre de valors diferents pels nou angles, d'entre totes les construccions que es poden dibuixar»*. Quants dels nou angles tenen valors diferents?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

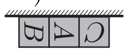
24. Un tetràedre regular $ABCD$ té la cara ABC en el pla π. L'aresta BC és a la recta s, la qual divideix el pla π en dos semiplans. Un altre tetràedre regular $BCDE$ comparteix una cara amb el tetràedre $ABCD$. On és el punt on la recta DE talla el pla π ?

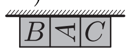
A) En el semiplà on no és A.
B) En el semiplà on és A, fora d'ABC.
C) En el semiplà on és A, dins d'ABC.
D) La recta DE és paral·lela a π.
E) La resposta depèn de la longitud de l'aresta del tetràedre.

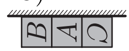
25. S'han portat tres capses grans a un magatzem i s'han posat a terra com es mostra a la figura.



Les capses s'han de posar contra la paret en un cert ordre, però són tan pesants que només es poden girar 90° a l'entorn d'una de les seves cantonades (exemples a la figura). Quina de les col·locacions següents pot ser possible?

A)


B)


C)


D)


E) Les quatre figures són possibles.

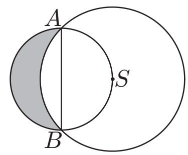
26. Quants parells ordenats de nombres enters i positius (x, y) satisfan l'equació $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

27. Per a un nombre enter $n \geq 2$, denotem per $\langle n \rangle$ el nombre primer més gran que no sobrepassa n. Quants enters positius k satisfan l'equació $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Més de 3

28. S'han construït dues circumferències, tal com es veu en la figura, de manera que el segment AB és un diàmetre de la petita i el punt S, centre de la gran, és en la circumferència petita. Si el radi de la circumferència gran és r, quina és l'àrea de la regió ombrejada?



A) $\dfrac{1}{2} \cdot r^2$ B) $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{12} \cdot r^2$ C) $\dfrac{\pi}{6} \cdot r^2$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$ E) Un altre valor

29. Quants conjunts de quatre arestes d'un cub tenen la propietat que dues arestes qualssevol del conjunt no tenen cap vèrtex en comú?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18

30. Trobeu tots els valors de n, $(0 < n < 9)$ de manera que si es marquen determinades caselles en un quadrat de dimensions 5×5, hi ha exactament n caselles marcades en cada quadrat possible de dimensions 3×3.

A) 1 B) 1 i 2 C) 1, 2 i 3 D) 1, 2, 7 i 8
E) Qualsevol dels valors és possible.

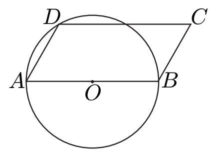
Cangur SCM 2011 (24 març) Nivell 3

Qüestions de 3 punts

1. En un pas zebra hi ha franges blanques i negres, totes d'amplada 60 cm. En una carretera, el pas comença i acaba amb una franja blanca. Este pas té 9 franges blanques. Quina és l'amplada de la carretera?

A) 11,4 m B) 10,8 m C) 10,2 m D) 5,4 m E) Un altre valor

2. Els angles aguts del paral·lelogram $ABCD$ de la figura fan 60°. El radi del cercle que passa per A, B i D és $OA = 3$ cm. Quina és l'àrea del paral·lelogram en cm^2?

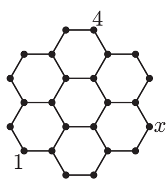


A) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ E) $9\sqrt{3}$

3. Donades les expressions $S_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$, $S_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2$ i $S_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, quina de les relacions següents és certa?

A) $S_3 < S_2 < S_1$ B) $S_2 = S_2 < S_3$ C) $S_1 < S_2 < S_3$
D) $S_2 < S_1 < S_3$ E) $S_1 < S_2 = S_3$

4. En la figura de la dreta s'ha de col·locar un nombre en cadascun dels punts •, de manera que la suma dels nombres que es troben en els extrems de cada segment siga la mateixa. Ja hi ha col·locats dos d'aquests nombres. Quin valor tindrà x ?



A) -1 B) 2 C) 1 D) -3 E) 4

5. Si dividim $3^{2011} + 203$ per $3^{2010} - 603$, quin n'és el residu?

A) 2009 B) 2010 C) 2011 D) 2012
E) Cap de les respostes anteriors no és vàlida.

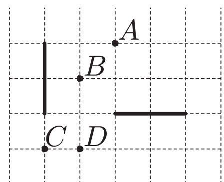
6. Un mosaic rectangular d'àrea 960 cm^2 s'ha fet amb peces quadrades, totes de la mateixa mida. El mosaic fa 40 cm de llargada per 6 peces d'amplada. Quina és l'àrea de cada peça en cm^2?

A) 1 B) 4 C) 9 D) 16 E) 25

7. Considerem els nombres enters compresos entre 1000 i 9999 que es poden escriure utilitzant totes les xifres del número 2011, és a dir, utilitzant un 0, dos 1 i un 2. Si els ordenem en ordre decreixent, quina és la diferència entre el primer i el darrer nombre de la llista?

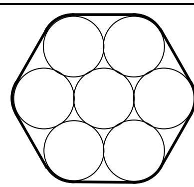
A) 999 B) 1008 C) 1080 D) 1089 E) 1098

8. Cadascun dels dos segments del dibuix s'ha obtingut a partir de l'altre mitjançant una rotació. Quins dels punts indicats poden ser el centre d'aquesta rotació?



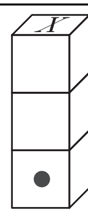
A) Només A B) Només D C) A i D D) A i C
E) A, B, C i D

9. La imatge mostra 7 monedes de radi 1 que s'han col·locat tangents les unes amb les altres. Hem posat un cordó que envolta les monedes. Quina és la longitud d'este cordó?



A) $6 + 2\pi$ B) $6 + 4\pi$ C) 12 D) $12 + \pi$ E) $12 + 2\pi$

10. La figura mostre tres daus convencionals, un damunt l'altre. Un dau convencional té la propietat que els nombres de punts de dues cares oposades sumen 7. En la figura, la suma dels punts de qualsevol parell de cares que es toquen és 5. Quants punts hi ha en la cara de dalt de tot, marcada amb una X?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) No es pot saber.

Qüestions de 4 punts

11. En la nostra classe hi ha 7 alumnes del poble A, 6 del poble B, 5 del poble C, 4 del poble D, 3 del poble E, 2 del poble F i la nostra professora és del poble G. La setmana passada l'escola va fer una excursió. La nostra classe va anar amb dos autobusos, tots dos amb el mateix nombre de persones. Sabem que totes les persones del mateix poble anaven en el mateix autobús i que l'autobús número 1 va recollir les persones del poble A i de tres pobles més. Quina de les afirmacions següents és la correcta?

A) La professora anava en l'autobús 2.
B) Les persones dels pobles B i C anaven en el mateix autobús.
C) Les persones dels pobles B i F anaven en el mateix autobús.
D) Les persones del poble D anaven en l'autobús 2.
E) Les persones dels pobles D i F no anaven en el mateix autobús.

12. Tres esportistes, Isabel, Agnès i Joana, van participar en una cursa. Just després de l'eixida, Isabel anava primera, Agnès segona i Joana tercera. Durant la cursa, Isabel i Agnès es van avançar l'una a l'altra 9 vegades, Agnès i Joana 10 vegades, i Isabel i Joana 11 vegades. En quin ordre van arribar a la meta?

A) Isabel, Agnès, Joana
B) Joana, Agnès, Isabel
C) Joana, Isabel, Agnès
D) Agnès, Joana, Isabel
E) Agnès, Isabel, Joana

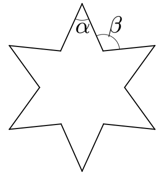
13. Suposem que x compleix que $8^x + 8^x + 8^x + 8^x = 2^{2011}$. Quin és el valor de x?

A) $\dfrac{2011}{9}$ B) $\dfrac{2009}{3}$ C) $\dfrac{2011}{6}$ D) $\dfrac{2009}{9}$
E) Cap de les respostes anteriors no és vàlida.

14. Tenim dos cubs els costats dels quals mesuren a dm i $a + 1$ dm respectivament. El cub gros és ple d'aigua i el menut és buit. Aboquem aigua del cub gros al cub menut fins que aquest s'ompli, i queden 271 litres en el cub gros. Quants litres d'aigua hem abocat al cub menut?

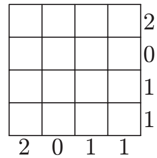
A) 243 B) 512 C) 125 D) 1331 E) 729

15. Lluïsa ha dibuixat una estrella regular de 6 puntes, en la qual l'angle exterior (β) és el doble de l'angle interior (α). Quant fa l'angle α?



A) 50° B) 52,5° C) 57,5° D) 60° E) 62,5°

16. Els quadrats d'aquest enreixat 4×4 es pinten de blanc o de negre. Els números que hi ha a la dreta de cada fila i sota de cada columna de l'enreixat indiquen el nombre de quadrats de color negre que hi ha a la respectiva fila o columna. De quantes maneres es pot pintar un enreixat d'esta forma?



A) 9 B) 5 C) 3 D) 1 E) 0

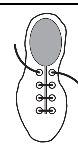
17. Quin és el nombre màxim de nombres enters consecutius de 4 xifres que tenen, com a mínim, una xifra parella?

A) 110 B) 1110 C) 1111 D) 2211 E) 221

18. Joana té un dau amb una cara marcada amb un 5, dues cares marcades amb un 4 i tres cares marcadaes amb un 1. Joan té un altre dau igual que el de Joana. Si Joana i Joan tiren els dos daus simultàniament i sumen els punts, quina és la probabilitat del resultat que té una probabilitat més gran de sortir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{2}{9}$

19. Una sabata de cordons té quatre parells de forats per passar-hi el cordó. Un cap del cordó entra pel forat de dalt a l'esquerra i l'altre cap surt pel forat de dalt a la dreta. Per anar passant el cordó, anem en cada pas de dreta a esquerra i d'esquerra a dreta, passant una sola volta per cada forat i passant per tots els forats. La vista exterior de la sabata és la de la figura de la dreta. Quina de les vistes següents no pot ser la del cordó en l'interior de la sabata?



A)

B)

C)

D)

E) Les quatre vistes anteriors són possibles.

20. En el costat AC d'un triangle isòsceles ABC, on els costats iguals són AB i AC, hem escollit un punt D, talment que $BD = AC$ i l'angle $\widehat{ABD}$ és de $20°$. Quant fa l'angle $\widehat{ACB}$?

A) $40°$ B) $50°$ C) $60°$ D) $70°$ E) $80°$

Qüestions de 5 punts

21. L'àrea d'un triangle rectangle ABC és 54 i la longitud del catet AC és la mitjana aritmètica de les longituds de l'altre catet, AB, i la hipotenusa, BC. Quina és la longitud de l'altura sobre la hipotenusa?

A) $\dfrac{36}{5}$ B) $\dfrac{12}{5}$ C) $\dfrac{24}{5}$ D) $\dfrac{18}{5}$ E) $\dfrac{9}{5}$

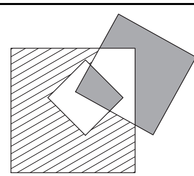
22. Diem que un número de cinc xifres $\overline{abcde}$ és *interessant* si totes les seves xifres són diferents i, a més, $a = b + c + d + e$. Quants números interessants hi ha?

A) 168 B) 216 C) 288 D) 144 E) 72

23. Els nombres x i y són, ambdós, més grans que 1. Quina de les fraccions següents té el valor més menut?

A) $\dfrac{2y+1}{2x}$ B) $\dfrac{2y-1}{2x}$ C) $\dfrac{3y+1}{3x}$ D) $\dfrac{y+1}{x}$ E) $\dfrac{y-1}{x}$

24. Dibuixem un quadrat de costat 3 cm dins d'un quadrat de costat 7 cm. A continuació dibuixem un altre quadrat de costat 5 cm que talla els dos primers quadrats, tal com es veu en la figura. Quina és la diferència entre l'àrea ratllada del quadrat gran i el total de la part grisa?

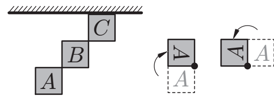


A) 10 cm^2 B) 12 cm^2 C) 15 cm^2 D) Són iguals.
E) No ho podem determinar sense més informació.

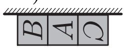
25. Quantes parelles ordenades (x, y) de nombres enters positius hi ha que complisquen que $x^2 - y^2 = 105$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

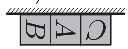
26. S'han portat tres capses grans a un magatzem i s'han posat a terra com es mostra a la figura.

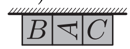


Les capses s'han de posar contra la paret en un cert ordre, però són tan pesants que només es poden girar 90° a l'entorn d'una de les seves cantonades (exemples a la figura). Quina de les col·locacions següents pot ser possible?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) Les quatre figures són possibles.

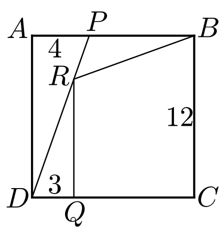
---

27. Una nau espacial es va desplaçar de la Terra a un planeta molt distant descobert recentment. Quan havia recorregut exactament un quart del camí, va perdre el contacte per ràdio. Aleshores, la nau va viatjar 2^{18} km sense comunicació i just en el moment en què va restablir el contacte, va rebre aquest missatge: *«Encara heu de recórrer* 2^{19} *km per a arribar al planeta»*. La distància en quilòmetres des de la Terra al planeta es pot expressar com a potència de 2. Quin és l'exponent d'esta potència?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 24 E) 37

---

28. La figura mostra un quadrat $ABCD$ de costat 12, P i Q són punts dels costats, talment que la distància AP és 4 i la distància DQ és 3. R és el punt del segment PD pel qual RQ és perpendicular a DC. Quina és la distància RB ?



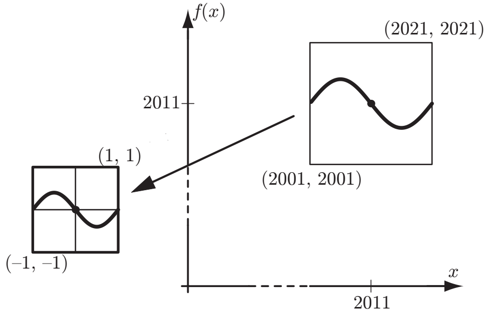
A) $3\sqrt{10}$ B) $\sqrt{72}$ C) $5+\sqrt{12}$ D) 9 E) $\dfrac{28}{3}$

---

29. L'àrea total d'un prisma rectangular recte (ortoedre) és de 22 cm^2 i la suma de les longituds de totes les arestes és 24 cm. Quina és, en cm, la longitud de la diagonal d'este ortoedre?

A) $\sqrt{11}$
B) $\sqrt{12}$
C) $\sqrt{14}$
D) Falten dades per a poder-la calcular.
E) No queda unívocament determinada.

30. El Petit Cangur té una calculadora gràfica en què la pantalla mostre els eixos x i y entre -1 i 1. El Petit Cangur no vol esbrinar com es pot canviar això, però vol veure el gràfic d'una funció $y = f(x)$, que compleix que $f(2011) = 2011$. De fet, vol veure'n el gràfic a prop del punt $(2011, 2011)$, en una zona més ampla que la que cap a la pantalla, la que correspon a un quadrat de 20 unitats de costat centrat en aquest punt que, per tant, tindrà $(2001, 2001)$ i $(2021, 2021)$ com a vèrtexs oposats . Quina és la funció que haurà de representar el Petit Cangur per a aconseguir veure el que vol?



A) $y = \dfrac{f(10x + 2011) + 2011}{10}$

B) $y = \dfrac{f(10x + 2011) - 2011}{10}$

C) $y = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{10}\right) + 2011}{10}$

D) $y = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{10}\right) - 2011}{10}$

E) Això que vol fer el Petit Cangur no és possible.

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi

Darío Nieuwenhuis Nivela (Aula Escuela Europea, Barcelona), 135 punts

Segon premi

Guillem Lahuerta Camps
(Frederic Mistral-Tècnic Eulàlia, Barcelona), 113.5 punts

Tercer premi

ex-aequo
Eduardo Adamo Atao Salazar (Sagrado Corazón de Jesús, Terrassa) i
Dídac Surís Coll-Vinent (Ins. Jaume Almera, Vilassar de Dalt), 107.5 punts

Altres premis

Marc Soley Fernández
(Institut Ramon Casas i Carbó, Palau-solità i Plegamans)
i Eric Milesi Vidal (Pare Manyanet, Barcelona), 106.25 punts
Erik Castells Lahoz (Institut Gallecs, Mollet del Vallès), 106 punts
Pau Duran Gual (Institut Torredembarra, Torredembarra), 104.5 punts
Marcel Catà Villa (Institut Damià Campeny, Mataró), 103.25 punts
Adrià Duran Sidera (Institut Castell d'Estela, Amer), 102.5 punts
Oriol Gasa Falcon (Institut Marius Torres, Lleida), 101 punts
David Masip Bonet (Institut Pons d'Icart, Tarragona) i
Jordi Barceló Mercader (Jesús Maria, Barcelona), 100.75 punts
John Steven Romero Tamayo (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 100 punts
Ernest Benedito Saura (Sant Ignasi, Barcelona), 99.5 punts
Oriol Esquivias Bautista de Lisbona
(Escola Pia de Nostra Senyora, Barcelona), 99.25 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Alba Surís Coll-Vinent (Institut Jaume Almera, Vilassar de Dalt),
Albert Peralta Amores (Vedruna, Terrassa) i
Eudald Romo Grau (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 98.75 punts
Albert Martí Domingo (Institut Numància, Santa Coloma de Gramenet) i
Marc Far Ruiz (Montessori-Palau, Girona), 97.5 punts
Gerard Moreno Giménez (Institut Martí l'Humà, Montblanc), 96.75 punts
Xavier Cabanes Bosacoma (Institut Maragall, Barcelona),
Marc Sánchez Alfonso (Aula Escuela Europea, Barcelona) i
Jordi Font Reverter (Escola Pia Balmes, Barcelona), 96.25 punts
Júlia Alsina Oriol (Institut Jaume Callís, Vic), 96 punts
Guillem Córdoba Perarnau (Escola Pia de Granollers, Granollers),
Eloi Buisán Mayós (Institut Canigó, Almacelles) i
David Portabella de Pedro (Escola Pia de Mataró, Mataró), 94.75 punts
Lluís Isern López (Institut Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 94.5 punts
Gerard Escribà Montagut (Institut Manuel de Montsuar, Lleida) i
Oleguer Gabernet Garriga (Institut Lo Pla d'Urgell, Bellpuig), 93.75 punts
David Balaghi Buil (Aula Escuela Europea, Barcelona) i
Àlex Sanabras Garrido (Bell-lloc del Pla, Girona), 93.5 punts
Axel Masó Puigdellosas (Institut Pere Alsius i Torrent, Banyoles)
i Bernat Font Mas (Sagrada Família, Gavà), 92.75 punts
Joshua Bailo Martínez (Institut Serra de Marina, Premià de Mar)
i Oriol Òrrit Xarpell (Institut Lluís de Peguera, Manresa), 92.5 punts
Joan Prunera Olivé (Institut Escola Industrial, Sabadell)
i Marc Rodà Llordes (Escola Pia de Terrassa, Terrassa), 92.25 punts

Premis. Balears

Primer premi

José Francisco Díaz Armesto (Col. Virgen del Carmen, Palma), 102,5 punts

Segon premi

Mónica Salgado Rodrigo (Col. Santa Mònica, Palma), 94,25 punts

Tercer premi

Marc Nuñez Corbacho (IES Algarb, Sant Jordi de Ses Salines), 93,25 punts

Altres premis

Feng Ma (IES Ses Estacions, Palma), 89,75 punts
Daniel González Hëdstrom (IES Son Ferrer, Calvià), 87,5 punts
Albert Marquès Triay (IES Maria Àngels Cardona, Ciutadella), 87,25 punts
Carlos Camps Mascaró (IES Maria Àngels Cardona, Ciutadella), 86 punts
M. Magdalena Vidal Monge (IES Santanyí, Santanyí), 85,75 punts
Antoni Ginard Adrover (Col. Sant Josep Obrer I, Palma) i
Simón Abellan Cardona (IES Joan Ramis i Ramis, Maó), 85 punts

Premis. País Valencià

Primer premi

Oscar Roldan Blay (IES Fancesc Ferrer i Guardia, València), 131,25 punts

Segon premi

Roberto Alegre Usach (IES La Serranía, Villar del Arzobispo), 121,25 punts

Tercer premi

Jaime Ferrer Velasco
(IES Vicent Sos Baynat, Castelló de la Plana), 107,25 punts

Altres premis

José Luis Pérez Martinez (IES Fancesc Ferrer i Guardia, València), 92 punts
Celia Traver Abella (IES Ramon Cid, Benicarló), 90,75 punts
Daniel Guinot Martinavarro
(IES Juan Bautista Porcar, Castelló de la Plana), 90 punts
Daniel Santacreu Ferrà (IES Josep Iborra, Benissa), 87,25 punts
ex-aequo, Jake Marshall (IES Bellaguarda, Altea) i
José Israel Sánchez García (IES A. Navarro Santafe, Villena), 84 punts
José Javier Moreno Soriano (IES José Rodrigo Botet, Manises), 83,75 punts

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 3

Qüestions de 3 punts

---

1. B. 7,5 m.

Si hi ha 8 franges blanques hi haurà 7 franges negres. L'amplada total que abasten les 15 franges serà: $15 \times 50 = 750$ cm $= 7{,}5$ m.

---

2. C. 26 cm^2.

L'àrea del rectangle és AB multiplicat per l'altura del rectangle.
Com que AB és la paral·lela mitjana del trapezi, la seva longitud és la semisuma de les bases del trapezi i l'altura del trapezi és el doble de l'altura del rectangle. Per tant l'àrea del trapezi és el doble de l'àrea del rectangle.

---

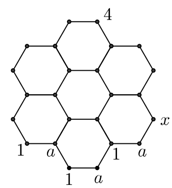
3. D. $S_3 < S_2 < S_1$.

Si comparem els sumands, ordenadament els de S_3, S_2, S_1, veiem que $1 \cdot 2 < 2 \cdot 2 < 2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 < 3 \cdot 3 < 3 \cdot 4$ i $3 \cdot 4 < 4 \cdot 4 < 4 \cdot 5$ i per tant tenim $S_3 < S_2 < S_1$.

---

4. A. 1.

Vegeu a la figura de la dreta que x ha de ser necessàriament $x = 1$. Podeu veure, doncs, que no ens cal el 4 per saber el valor de x; això sí, amb el 4 podem deduir que la suma de cada segment és 5.



---

5. E. No és possible obtenir aquest residu..

Si el divisor fos 2011 i el residu 1011, el producte del divisor pel quocient hauria de ser 1000 i, doncs, el divisor seria més petit o igual que 1000 i aleshores el residu no pot ser mai 1011.

---

6. C. 9.

Si considerem que una peça fa x cm de costat tindrem que $360 = 24 \cdot 5 \cdot x$, per tant $x = 3$ cm i la peça fa 9 cm^2 d'àrea.

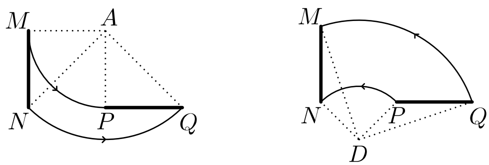
---

7. D. novena.

Els nombres amb 4 xifres que sumen 4 poden estar formats per les xifres 4000, o bé 3100, o bé 2200, o bé 2110, o bé 1111, en els diferents ordres possibles. La llista comença amb el 4000, segueix amb els tres que comencen per 3 (3100, 3010, 3001), i a continuació ja venen els que comencen per 2, en aquest ordre 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002. El 2011 és el 9è.

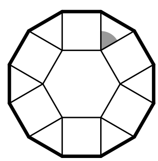
8. A. A i D.

El punt A és el centre d'una rotació de 90° en sentit antihorari que transforma MN en PQ. El punt D és el centre d'una rotació de 90° en sentit antihorari que transforma PQ en NM. C no pot ser el centre d'una rotació que transformi un segment en un altre perquè no és a la mateixa distància de cap parella dels extrems dels segments. Com que les distàncies de B a M i N són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ i les distàncies a P i Q són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{10}$ tampoc no pot ser el centre de cap rotació que transformi un segment en un altre.



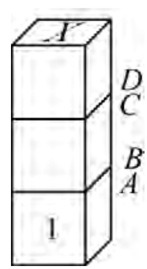
9. C. 12.

En un vèrtex de l'hexàgon concorren dos quadrats i un triangle. L'angle interior de l'hexàgon mesura 120° i per tant l'angle del triangle és $360° - 120° - 2 \cdot 90° = 60°$. Per tant el triangle és equilàter i el dodecàgon és regular amb un perímetre de 12 unitats.



10. E. 6.

A les cares adossades A, B, C i D no hi poden anar ni el 5 ni el 6 perquè $A + B = 5$ i $C + D = 5$. Aleshores no pot ser $A = 1$ (és a la cara vista), ni $A = 4$, perquè seria $B = 1$ (per sumar 5) i a C, oposada a B hi hauria un 6. Si a A hi hagués un 3, seria $B = 2$ (per sumar 5) i a C hi hauria un 5, cosa que no pot ser. Per tant $A = 2$, $B = 3$ (per sumar 5), $C = 4$ (oposada a B), $D = 1$ (per sumar 5) i la seva oposada serà $X = 6$.



Qüestions de 4 punts

11. B. Exactament, quatre dissabtes.

Perquè succeeixi el que diu l'enunciat el mes ha de ser de 31 dies i ha de començar en dilluns, perquè aleshores tindrà quatre setmanes senceres més els dies 29, 30 i 31 que seran dilluns, dimarts i dimecres. Per tant, el mes anterior acaba en diumenge i, si només té quatre diumenges, ha de ser forçosament el mes de febrer (d'un any que no sigui de traspàs). Per tant el mes següent al de l'enunciat és el mes de març, que comença en dijous i tindrà cinc dijous, cinc divendres (el cinquè el dia 30), quatre dissabtes i quatre diumenges.

12. B. Agnès, Hana, Isabel.

Si la Isabel i l'Agnès es van avançar 9 vegades van intercanviar les seves posicions; això mateix succeeix amb la Isabel i la Hana; en canvi l'Agnès i la Hana, com que es van avançar 10 vegades van arribar en el mateix ordre que estaven just després de la sortida. Si aleshores anaven Isabel-Agnès-Hana al final les posicions seran Agnès-Hana-Isabel.

13. A. 1005.

$9^n + 9^n + 9^n = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot \left(3^2\right)^n = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}$.

Si ha de ser $3^{2n+1} = 3^{2011}$ tenim $2n + 1 = 2011$ i per tant $n = 1005$.

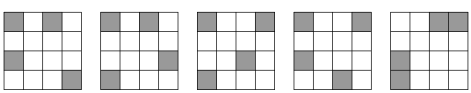
14. E. 512 L.

El volum del cub gros és $V = (a+1)^3$ i el del cub menut $v = a^3$. Si aboquem aigua del cub gros per omplir el menut al cub gros quedaran $V - v = (a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$ litres i al cub menut hi haurà $v = a^3$ litres. Si $3a^2 + 3a + 1 = 217$ aleshores $a = 8$ i al cub menut hi ha $8^3 = 512$ litres.

15. E. 45.

El centre de l'esfera, que és el baricentre del triangle equilàter, determina sobre l'altura del triangle dos segments de manera que el petit, és a dir el radi de l'esfera, és $\frac{1}{3}$ de l'altura. Per tant la profunditat serà el triple del radi, o sigui 45 cm.

16. D. 5.



17. D. 111.

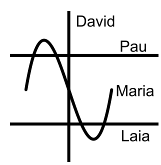
Segur que haurem de triar tots els d'una centena que comenci amb xifra senar, N. Així del $N00$ al $N99$ ja tenim 100 nombres consecutius amb xifra senar, però el nombre següent ja no en té. De la centena anterior tenen xifra senar i enllacen amb els que ja hem dit, posant $A = N - 1$, des del $A89$ fins al $A99$. En total 111 nombres, per exemple des del 289 fins al 399.

18. A. 10.

Hi ha quatre quadrats de 2×2. Si sumem les xifres dels quatre quadrats el total serà 40. Haurem comptat una vegada els números 1, 2, 4, 5, quatre vegades el 2 central i dues vegades cadascun dels altres nombres. Per tant, si s és la suma que busquem tindrem $40 = 12 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot s$ i, per tant, $s = 10$.

19. C. La Maria.

L'avinguda on viu la Maria talla dos cops al carrer d'en Pau, un cop al carrer d'en David i dos cops al carrer de la Laia i, doncs, forçosament aquesta ha de ser l'avinguda Corba. Si mireu els altres talls constatareu que l'esquema correcte seria com el que teniu a la dreta.



20. E. $\dfrac{x}{y-1}$.

Els cinc valors de les opcions de resposta es poden escriure com

$$\frac{6x}{6y+6}, \frac{6x}{6y+2}, \frac{6x}{6y+3}, \frac{6x}{6y-3}, \frac{6x}{6y-6}.$$

Com que són fraccions de numerador i denominador positiu, que tenen el mateix numerador, la més gran serà la que tingui el denominador més petit, és a dir l'última, $\dfrac{x}{y-1}$

Qüestions de 5 punts

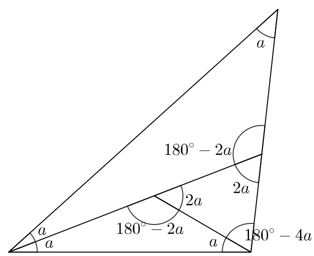
21. C. 225.

La part negra d'una cara del cub està formada pel quadrat central sencer i quatre meitats, en total tres quadrats negres. La part blanca està formada per quatre quadrats sencers i els quatre quarts de les cantonades, en total cinc quadrats blancs. Per tant en cada cara la part negra representa les 3/8 parts del total i, com que totes les cares són iguals, la part negra serà 3/8 dels 600 cm^2 de les sis cares del cub, 225 cm^2 .

22. C. 168.

Les xifres b, c, d, e del nombre $\overline{abcde}$ han de ser diferents i no sumar més de 9 ja que aquesta suma serà la xifra a. Hi ha set grups de quatre xifres diferents que no sumen més de 9, a saber 0123, 0124, 0125, 0126, 0134, 0135, 0234 i cada grup de 4 xifres es pot ordenar de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneres diferents. Per tant en total hi ha $7 \cdot 24 = 168$ *nombres interessants* diferents.

23. B. 3.



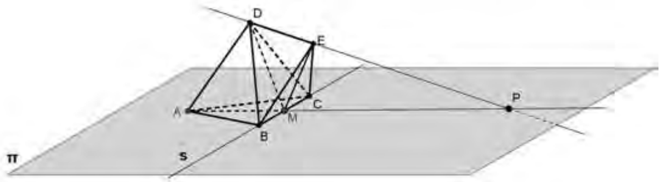
Segur que el nostre company ha pensat que aniria bé que tots tres triangles en què es descompon el triangle ABC fossin isòsceles; d'aquesta manera el nombre d'angles diferents segur que es redueix. A la dreta teniu una figura que ho concreta. Posem a als dos angles de "la base de baix"; l'altre angle d'aquell triangle serà $180° - 2a$ i el seu adjacent suplementari, $2a$. Perquè el triangle de la dreta sigui isòsceles hi haurà un altre $2a$ i un $180° - 4a$.

En el triangle de dalt tenim $180° - 2a$, suplementari d'un angle de $2a$. Perquè sigui isòsceles els altres angles han de ser iguals a a. Entre els angles que apareixen, a, $2a$, $180° - 2a$, $180° - 4a$ pot ser que només n'hi hagi tres de diferents posant $180° - 4a = 2a$, d'on $a = 30°$ i els angles que apareixen a la figura són de 30°, 60° i 120°. Si fem $180° - 4a = a$ també apareixen només tres angles diferents, 36°, 72° i 108°.

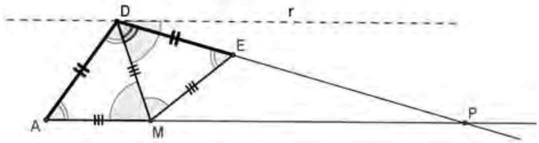
En cap cas pot ser que només hi hagi dues mesures diferents per als angles. Com que $a > 0$ serà $a \neq 2a$; aquests dos valors haurien de ser iguals a $180° - 4a$ i a $180° - 2a$, cosa que no pot ser.

24. A. En el semiplà on no és A.

Vegeu aquesta figura que representa l'enunciat

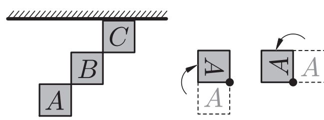


Si considerem el pla π que conté els vèrtexs A, D i E, tindrem la secció següent perpendicular al pla π:



En aquesta secció tenim dos triangles isòsceles iguals amb els costats AD i DE arestes dels tetràedres, i els altres costats, concurrents en M, altures de les cares dels tetràedres i per tant de longitud més petita que les arestes. Amb això tenim que l'angle AMD és més gran que el MDE i per tant, si ens fixem en la recta r paral·lela a AM per D, la recta DE tallarà la recta AM en un punt P situat en el semiplà que no conté A.

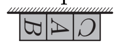
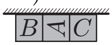
25. B.



Posem coordenades, de manera que els centres de les caixes siguin els (i, j) enters. Fixem-nos en la paritat del valor $i + j$. Quan girem una caixa, la passem del seu lloc (i, j) a una de les 4 caselles del costat (amb costat comú): $(i - 1, j)$,$(i + 1, j)$, si l'hem moguda lateralment o bé $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$ si l'hem moguda amunt o avall.

En qualsevol dels quatre girs anteriors la paritat de la suma de coordenades canvia.

Observem també que en un sol moviment podem girar les caixes o bé 90° o bé 270°, és a dir, les lletres quedaran apaisades, cap a la dreta o cap a l'esquerra. Això passarà també en qualsevol moviment d'un nombre senar de passos. Els moviments d'un nombre parell de passos deixaran les lletres cap amunt o cap avall, girs de 180° o de 360°, però no apaisades.

Suposem que la posició inicial de les caixes és d'una paritat concreta, per exemple, parell. Observem que en la resposta A)  hem d'haver fet un nombre senar de passos per la caixa A i també un nombre senar per la B. Això és impossible ja que A i B estan en caselles de paritat diferent.
Anàlogament es raona en els casos C) (senar, senar, senar) i D) (parell, parell, parell).
El cas B)  és possible fent una rotació de 90° (sentit horari) de la caixa A sobre el vèrtex superior dret i després una rotació de 180° (sentit antihorari) sobre el nou vèrtex superior dret. La lletra B s'ha de rotar 90° (s.h.) sobre el vèrtex superior esquerre i tot seguit 90° més (s.a.) sobre el nou vèrtex superior esquerre.

---

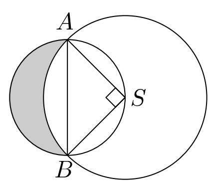
26. D. 3.
Si de l'equació $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ aïllem y obtenim $y=\frac{3x}{x-3}=3+\frac{9}{x-3}$. Si y ha de ser enter, $x-3$ ha de ser un divisor de 9. Com que a més ha de ser $y>0$ això dóna les solucions $x-3=1, x=4, y=12$, $x-3=3, x=6, y=6$ i $x-3=9, x=12, y=4$.

---

27. B. 1.
Si $k=1$ tenim $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2\rangle+\langle 3\rangle=2+3=5$ i $\langle 2k+3>=\langle 5\rangle=5$ i per tant se satisfà l'equació.
Si $k>1$ els nombres primers $\langle k+1\rangle$ i $\langle k+2\rangle$ seran més grans que 2 i per tant imparells. La seva suma donarà un nombre parell que no podrà ser el primer $\langle 2k+3\rangle$ perquè és un nombre imparell.
Per tant només un nombre satisfà l'equació de l'enunciat.

---

28. A. $\frac{r^2}{2}$.
L'angle indicat en S és recte, perquè és un angle inscrit en la circumferència petita que abasta mitja circumferència. Per tant, l'àrea del sector circular determinat per l'arc AB en el cercle gran és una quarta part de l'àrea del cercle, $A_s=\frac{\pi r^2}{4}$.

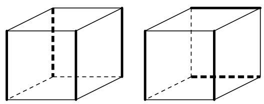


El triangle ASB es rectangle isòsceles amb els dos catets iguals a r i per tant té àrea $A_t=\frac{r^2}{2}$. L'àrea del segment circular corresponent serà la del sector circular menys la del triangle: $A_{sg}=\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}$.

Finalment, l'àrea de la lúnula que busquem és la meitat de l'àrea del cercle petit menys l'àrea del segment circular que hem trobat. Anomenant d el diàmetre del cercle petit i aplicant el teorema de Pitàgores al triangle ASB trobem que $d = r\sqrt{2}$ i per tant el radi del cercle petit és $\dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ i l'àrea del cercle petit és $A_c = \dfrac{\pi r^2}{2}$. Així doncs l'àrea de la lúnula és $A = \dfrac{1}{2}A_c - A_{sg} = \dfrac{\pi r^2}{4} - (\dfrac{\pi r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}) = \dfrac{r^2}{2}$.

29. C. 9.

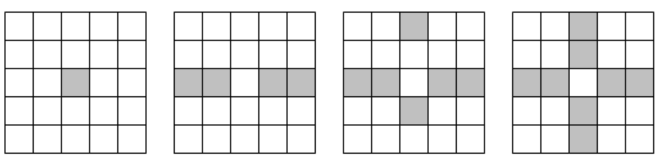
Hi ha dues possibilitats a considerar, que les quatre arestes siguin paral·leles o que no ho siguin.



• Hi ha 3 conjunts de quatre arestes paral·leles, en les tres direccions que determinen les arestes del cub.
• Hi ha 6 conjunts de quatre arestes que són paral·leles per parelles. Una parella d'aquestes arestes determina una cara (així doncs, 6 possibilitats) i l'altra queda situada en la cara oposada a l'anterior.

30. E. Qualsevol dels valors és possible.

La figura mostra situacions que indiquen que qualsevol valor de n, $(0 < n < 9)$ és possible. El primer esquema justifica $n = 1$ i $n = 8$; el segon justifica $n = 2$ i $n = 7$. El tercer serveix per demostrar-ho en els casos $n = 3$ i $n = 6$ i l'últim per $n = 4$ i $n = 5$.



Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 3

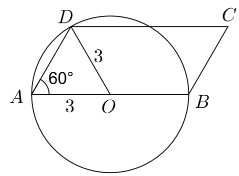
Qüestions de 3 punts

1. C. 10,2 m.

Si hi ha 9 franges blanques hi haurà 8 franges negres. L'amplada total que abasten les 17 franges serà: $17 \times 60 = 1020$ cm $= 10{,}2$ m.

2. E. $9\sqrt{3}$.

El triangle de la figura és equilàter. La seua altura, que és la del paral·lelogram, és $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Per tant, l'àrea del paral·lelogram serà $6 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm^2.

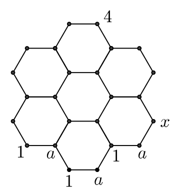


3. A. $S_3 < S_2 < S_1$.

Si comparem els sumands, ordenadament els de S_3, S_2, S_1, veiem que $1 \cdot 2 < 2 \cdot 2 < 2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 < 3 \cdot 3 < 3 \cdot 4$ i $3 \cdot 4 < 4 \cdot 4 < 4 \cdot 5$ i per tant tenim $S_3 < S_2 < S_1$.

4. A. 1.

Vegeu a la figura de la dreta que x ha de ser necessàriament $x = 1$. Podeu veure, doncs, que no ens cal el 4 per saber el valor de x; això sí, amb el 4 podem deduir que la suma de cada segment és 5.



5. D. 2012.

Podem expressar $3^{2011}+203 = 3 \cdot 3^{2010} - 3 \cdot 603 + 2012 = 3\left(3^{2010} - 603\right) + 2012$ i atenent a la fórmula de la divisió euclidiana $D = d \cdot q + r$, el residu és 2012.

6. D. 16.

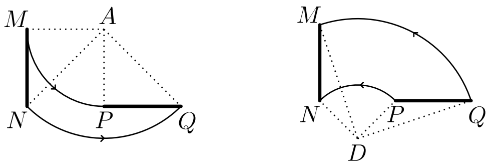
Si considerem que una peça fa x cm de costat tindrem que $960 = 40 \cdot 6 \cdot x$, per tant $x = 4$ cm i la peça fa 16 cm^2 d'àrea.

7. E. 1098.

El primer nombre de la llista és el 1012 i l'últim és el 2110. La diferència és $2110 - 1012 = 1098$.

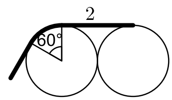
8. C. A i D.

El punt A és el centre d'una rotació de 90° en sentit antihorari que transforma MN en PQ. El punt D és el centre d'una rotació de 90° en sentit antihorari que transforma PQ en NM. C no pot ser el centre d'una rotació que transformi un segment en un altre perquè no és a la mateixa distància de cap parella dels extrems dels segments. Com que les distàncies de B a M i N són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ i les distàncies a P i Q són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{10}$ tampoc no pot ser el centre de cap rotació que transformi un segment en un altre.



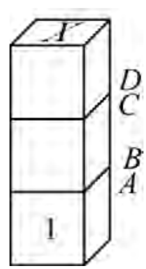
9. E. $12 + 2\pi$.

La figura mostra que la sisena part de la longitud del cordó està formada per un segment de 2 unitats (igual a dos radis) més un arc de 60° d'una de les circumferències, que tindrà doncs una longitud de $\frac{2\pi}{6}$. La longitud total del cordó serà $L = 6\left(2 + \frac{2\pi}{6}\right) = 12 + 2\pi$.



10. D. 6.

A les cares adossades A, B, C i D no hi poden anar ni el 5 ni el 6 perquè $A + B = 5$ i $C + D = 5$. Aleshores no pot ser $A = 1$ (és a la cara vista), ni $A = 4$, perquè seria $B = 1$ (per sumar 5) i a C, oposada a B hi hauria un 6. Si a A hi hagués un 3, seria $B = 2$ (per sumar 5) i a C hi hauria un 5, cosa que no pot ser. Per tant $A = 2$, $B = 3$ (per sumar 5), $C = 4$ (oposada a B), $D = 1$ (per sumar 5) i la seva oposada serà $X = 6$.



Qüestions de 4 punts

11. B. Les persones dels pobles B i C anaven en el mateix autobús..

La distribució per pobles és:

A	B	C	D	E	F	G	**TOTAL**
7	6	5	4	3	2	1	**28**

És a dir, aniran 14 a cada autobús. Donat que en el primer ja van els del poble A (que són 7) i han d'anar-hi de tres pobles més, l'única terna que suma 7 és $D+F+G=4+2+1=7$. És a dir que a l'autobús 1 hi aniran els de A, els de D, els de F i la professora que vé de G. L'única afirmació certa serà, aleshores, la B).

12. D. Agnès, Joana, Isabel.

Si la Isabel i l'Agnès es van avançar 9 vegades van intercanviar les seves posicions; això mateix succeeix amb la Isabel i la Joana; en canvi l'Agnès i la Joana, com que es van avançar 10 vegades van arribar en el mateix ordre que estaven just després de la sortida. Si aleshores anaven Isabel-Agnès-Joana al final les posicions seran Agnès-Joana-Isabel.

13. B. $\dfrac{2009}{3}$.

$8^x+8^x+8^x+8^x=4\cdot 8^x=4\cdot\left(2^3\right)^x=2^2\cdot 2^{3x}=2^{3x+2}$.

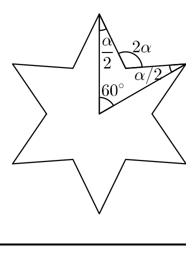
Si ha de ser $2^{3x+2}=2^{2011}$ tenim $3x+2=2011$ i per tant $x=\dfrac{2009}{3}$.

14. E. 729 litres.

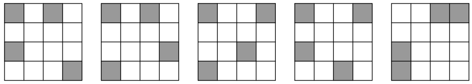
El volum del cub gros és $V=(a+1)^3$ i el del cub menut $v=a^3$. Si aboquem aigua del cub gros per omplir el menut al cub gros quedaran $V-v=(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$ litres i al cub menut hi haurà $v=a^3$ litres. Si $3a^2+3a+1=271$ aleshores $a=9$ i al cub menut hi ha $9^3=729$ litres.

15. D. $60°$.

En el quadrilàter de la figura hem deduït tres angles interiors per la simetria de la figura i ja hem posat que l'angle exterior és $\beta=2\alpha$. Els angles del quadrilàter sumen $360°=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha}{2}+60°+(360°-2\alpha)$ i d'ací es dedueix $\alpha=60°$.



16. B. 5.



17. C. 1111.

Segur que haurem de triar tots els d'un miler que comenci amb xifra parella, N. Així del $N000$ al $N999$ ja tenim 1000 nombres consecutius amb una xifra parella. El nombre anterior a aquest miler no en tindrà. Si passem al miler següent tenen xifra parella i enllacen amb els que ja hem dit, posant $A = N + 1$, des del $A000$ fins al $A099$ que tenen el 0, però podem continuar amb $A100$ fins al $A110$. El següent, el $A111$ ja no tindrà xifra parella. En total són 1111 nombres, per exemple des del 4000 fins al 5110.

18. B. $\dfrac{1}{3}$.

Possiblement la manera més ràpida de trobar la probabilitat dels resultats que poden aparèixer quan fem la suma de les puntuacions dels dos daus és amb una taula de doble entrada. D'esta manera observem 36 situacions equiprobables, de les quals el 5 és el valor que apareix més, 12 vegades. La probabilitat d'obtenir un 5 és, doncs, $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

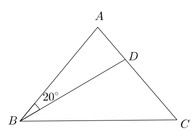
	5	4	4	1	1	1
5	10	9	9	6	6	6
4	9	8	8	5	5	5
4	9	8	8	5	5	5
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2

19. B.

La vista que no és possible és la B) perquè quedarien dos trossos de cordó desconnectats. Totes les altres vistes sí que són possibles.

20. B. $50°$.

Com que $BD = AC = AB$ el triangle ABD també serà isòsceles i els angles $\widehat{BAD} = \widehat{BDA} = 80°$ i aleshores, com que el triangle ABC és isòsceles i els altres dos angles han de ser iguals $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50°$.



Qüestions de 5 punts

21. A. $\dfrac{36}{5}$.

Si a és el catet que la longitud és la mitjana dels altres dos costats, podem representar-los $a-h$, a i $a+h$. Si apliquem el teorema de Pitàgores tindrem $(a+h)^2 = a^2+(a-h)^2$ d'on es dedueix $a = 4h$, els catets esdevenen $3h$, $4h$ i la hipotenusa $5h$. L'àrea és $54 = \dfrac{3h \cdot 4h}{2}$ d'on resulta $h = 3$. La hipotenusa és $5h = 15$, i si designem com x l'altura sobre la hipotenusa, l'àrea també es pot calcular $54 = \dfrac{15x}{2}$ i per tant $x = \dfrac{108}{15} = \dfrac{36}{5}$.

22. A. 168.

Les xifres b, c, d, e del nombre $\overline{abcde}$ han de ser diferents i no sumar més de 9 ja que aquesta suma serà la xifra a. Hi ha set grups de quatre xifres diferents que no sumen més de 9, a saber 0123, 0124, 0125, 0126, 0134, 0135, 0234 i cada grup de 4 xifres es pot ordenar de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneres diferents. Per tant en total hi ha $7 \cdot 24 = 168$ *nombres interessants* diferents.

23. E. $\dfrac{y-1}{x}$.

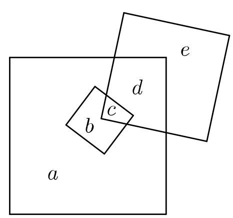
Si reduïm a comú denominador $6x$ les cinc fraccions de l'enunciat obtenim

$$\frac{6y+3}{6x}, \frac{6y-3}{6x}, \frac{6y+2}{6x}, \frac{6y+6}{6x}, \frac{6y-6}{6x}.$$

Com que són fraccions de denominador positiu la més menuda serà la que té el numerador més menut que, evidentment, és aquesta última que és igual a $\dfrac{y-1}{x}$.

24. C. 15 cm^2.

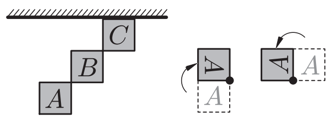
Si indiquem amb a, b, c, d, e les àrees de les cinc regions de la figura podem comprovar que $a+b+c+d = 49(*)$, que $b+c = 9(**)$ i que $c+d+e = 25(***)$. Si restem de l'equació (*) la suma de (**)+(***) obtenim $a-(c+e) = 15$ i això és el que demanava l'enunciat.



25. E. 4.

Donat que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ té $2 \cdot 2 \cdot 2$ divisors. Per altra banda $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 105$. Per cada parella de divisors a, b de 105 "complementaris", és a dir que $a \cdot b = 105$ amb $a > b$, podrem trobar x, y enters positius que compleixin $x + y = a$ i $x - y = b$? Com que la solució d'aquest sistema és $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{a-b}{2}$ perquè x, y siguin enters positius és necessari i suficient que a i b siguin de la mateixa paritat. Com que en el cas del 105 tots els divisors són imparells, hi haurà 4 parelles de divisors vàlides i 4 parells (x, y).

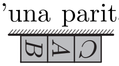
26. D.



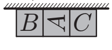
Posem coordenades, de manera que els centres de les caixes siguin els (i, j) enters. Fixem-nos en la paritat del valor $i + j$. Quan girem una caixa, la passem del seu lloc (i, j) a una de les 4 caselles del costat (amb costat comú): $(i-1, j)$,$(i+1, j)$, si l'hem moguda lateralment o bé $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ si l'hem moguda amunt o avall.

En qualsevol dels quatre girs anteriors la paritat de la suma de coordenades canvia.

Observem també que en un sol moviment podem girar les caixes o bé 90° o bé 270°, és a dir, les lletres quedaran apaisades, cap a la dreta o cap a l'esquerra. Això passarà també en qualsevol moviment d'un nombre senar de passos. Els moviments d'un nombre parell de passos deixaran les lletres cap amunt o cap avall, girs de 180° o de 360°, però no apaisades.

Suposem que la posició inicial de les caixes és d'una paritat concreta, per exemple, parell. Observem que en la resposta C)  hem d'haver fet un nombre senar de passos per la caixa A i també un nombre senar per la B. Això és impossible ja que A i B estan en caselles de paritat diferent.

Anàlogament es raona en els casos A) (senar, senar, senar) i B) (parell, parell, parell).

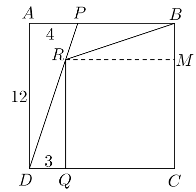
El cas D)  és possible fent una rotació de 90° (sentit horari) de la caixa A sobre el vèrtex superior dret i després una rotació de 180° (sentit antihorari) sobre el nou vèrtex superior dret. La lletra B s'ha de rotar 90° (s.h.) sobre el vèrtex superior esquerre i tot seguit 90° més (s.a.) sobre el nou vèrtex superior esquerre.

27. A. 20.

Si d és la distància que ens demanen, quan es perd el contacte per ràdio s'ha recorregut $\dfrac{d}{4}$ i el que manca per recórrer és $\dfrac{3d}{4} = 2^{18} + 2^{19} = 2^{18} \cdot (1+2) = 3 \cdot 2^{18}$ i d'aci es dedueix $d = 4 \cdot 2^{18} = 2^{20}$.

28. A. $3\sqrt{10}$.

Els triangles APD i QDR són semblants. Aleshores $\dfrac{RQ}{12} = \dfrac{3}{4}$ d'on $RQ = 9$. Per tant, el triangle rectangle MBR té el catets $MR = 12-3 = 9$ i $MB = 12-9 = 3$ i la hipotenusa n'és $BR = \sqrt{9^2+3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.



29. C. $\sqrt{14}$.

Si indiquem com a, b, c les longituds de les arestes diferents de l'ortoedre l'àrea total serà $2ab+2ac+2bc = 22$ i la suma de totes les arestes $4(a+b+c) = 24 \Rightarrow a+b+c = 6$. Aleshores $36 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ i per tant $a^2+b^2+c^2 = 36-22 = 14$. Ara bé, si d és la diagonal de l'ortoedre, el teorema de Pitàgores ens permet deduir que $d^2 = a^2+b^2+c^2$ i, doncs, $d^2 = 14 \Rightarrow d = \sqrt{14}$.

30. B. $y = \dfrac{f(10x+2011)-2011}{10}$.

Per comprovació podem veure que l'única de les funcions donades que pot fer la transformació adequada és la B).

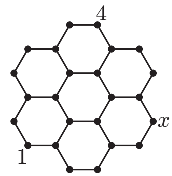
Si la indiquem com $F(X) = \dfrac{f(10x+2011)-2011}{10}$ en cas que la funció donada compleixi $f(2011) = 2011$ és $F(0) = 0$; si fos $f(2021) = 2021$ trobaríem $F(1) = 1$; si fos $f(2001) = 2001$ en resulta $F(-1) = -1$; etc.

A partir de les idees de transformacions de funcions podem raonar que la transformació és realment la correcta.

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. En la figura de la dreta s'ha de col·locar un nombre en cadascun dels punts •, de manera que la suma dels nombres que es troben en els extrems de cada segment sigui la mateixa. Ja hi ha col·locats dos d'aquests nombres. Quin valor tindrà x ?



A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 24

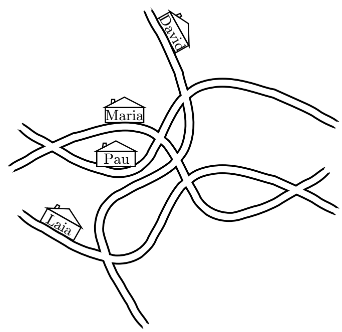
2. Tres esportistes, la Isabel, l'Agnès i la Hana, van participar en una cursa. Just després de la sortida, la Isabel anava primera, l'Agnès segona i la Hana tercera. Durant la cursa la Isabel i l'Agnès es van avançar l'una a l'altra nou vegades, l'Agnès i la Hana deu vegades, i la Isabel i la Hana onze vegades. En quin ordre van arribar a la meta?

A) Agnès, Hana, Isabel B) Isabel, Agnès, Hana C) Hana, Isabel, Agnès D) Hana, Agnès, Isabel E) Agnès, Isabel, Hana

3. Si $2^x = 15$ i $15^y = 32$ aleshores $x \cdot y$ és igual a:

A) 5 B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ C) $\log_2 47$ D) 7 E) $\sqrt{47}$

4. La Joana, encara que no sap dibuixar gaire bé, ha intentat esbossar un mapa del seu poble. Ha dibuixat quatre avingudes amb els set encreuaments corresponents i les cases dels seus amics, però, en realitat, l'avinguda de la Fletxa, l'avinguda de la Clau i l'avinguda del Regle són totes avingudes rectes. La quarta avinguda és l'avinguda Corba. Quin dels amics de la Joana viu a l'avinguda Corba?



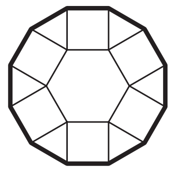
A) La Laia B) En Pau C) La Maria D) En David
E) No ho podem saber només mirant el dibuix que ha fet la Joana

5. Fem una llista, en ordre descendent, de tots els números de quatre xifres pels quals la suma de les seves xifres és igual a 4. En quina posició d'aquesta llista hi ha el número 2011?

A) 6a B) 7a C) 8a D) 9a E) 10a

---

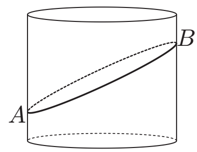
6. El dibuix mostra una figura formada per un hexàgon regular en què cada costat fa una unitat, sis triangles i sis quadrats. Quin és el perímetre de la figura?



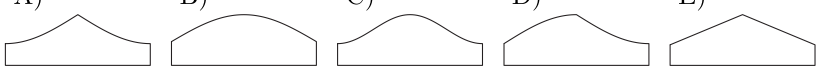
A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ B) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C) 9 D) $6+3\sqrt{2}$ E) 12

---

7. Un tros de paper rectangular està enrotllat al voltant d'un cilindre i hi ha un pla que el talla pels punts A i B, com es mostra en la figura. La part inferior del paper es desenrotlla. Quina de les figures següents en pot ser la resultant?

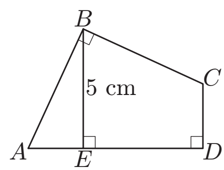


A) B) C) D) E)



---

8. Trobeu l'àrea del quadrilàter $ABCD$ (segons el dibuix) en el qual $AB = BC$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, BE és perpendicular a AD i $BE = 5$ cm.



A) 20 cm^2 B) 22,5 cm^2 C) 25 cm^2 D) 27,5 cm^2 E) 30 cm^2

---

9. L'Andreu escriu els nombres imparells de l'1 al 2011 en una pissarra i, a continuació, en Pere esborra tots els múltiples de 3. Quants nombres queden a la pissarra?

A) 335 B) 336 C) 671 D) 1005 E) 1006

10. En Marc i l'Hug llancen uns daus per decidir qui ha de ser el primer en entrar a l'aigua d'un llac fred. Si no surt cap sis, en Marc serà el primer a banyar-se. Si només surt un sis, l'Hug entrarà a l'aigua en primer lloc i, si hi ha més sisos, cap dels dos no es banyarà. Quants daus han de llançar si volen que la probabilitat d'entrar a l'aigua en primer lloc sigui la mateixa?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 9 E) 17

Qüestions de 4 punts

11. Ajuntem, sense superposició, tres rectangles de dimensions 7×11, 4×8 i $x \times y$ per fer un altre rectangle. Quines han de ser les dimensions $x \times y$ del tercer rectangle si volem que l'àrea del rectangle gran així format sigui màxima?

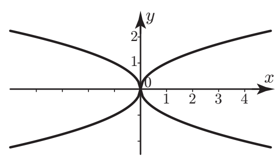
A) 1×11 B) 3×4 C) 3×8 D) 7×8 E) 7×11

12. En Miquel vol escriure nombres enters i positius en les cel·les de la taula 3×3 de manera que la suma dels quatre nombres de cada quadrat 2×2 sigui 10. Ja ha escrit quatre nombres a la taula, tal com es mostra en la figura. Quin dels nombres següents podria ser la suma dels cinc restants?

	2	
1		3
	4	

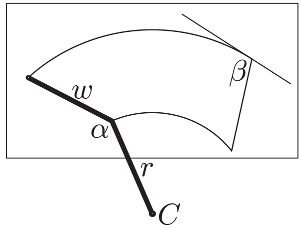
A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) Cap dels anteriors és possible.

14. Quants gràfics de les funcions $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = +\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = +\sqrt{|x|}$ i $y = -\sqrt{|x|}$ hi ha representats en el diagrama de la dreta?



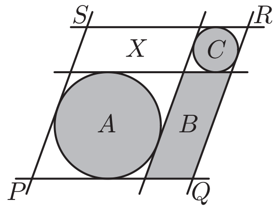
A) Cap B) 2 C) 4 D) 6 E) Tots 8

15. L'eixugaparabrises del darrere d'un cotxe s'ha construït de manera que l'escombreta w i el braç r són d'igual longitud i s'uneixen formant un angle α. L'eixugaparabrises pivota en el centre C i escombra la zona, com es mostra en la figura. Determineu l'angle β entre la vora dreta de l'àrea escombrada i la tangent de la vora superior corbada.



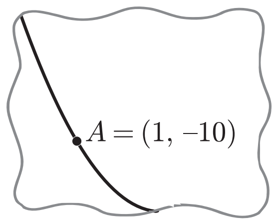
A) $\dfrac{3\pi-\alpha}{2}$ B) $\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ C) $\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$ D) $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ E) $\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

16. Tenim tres línies horitzontals i tres línies inclinades paral·leles entre elles. Els dos cercles són tangents a quatre de les línies. A, B i C són les àrees de les figures ombrejades. Quines àrees, entre les A, B i C, cal conèixer per a poder saber l'àrea del paral·lelogram X ?



A) A B) B C) C D) A i C
E) X no es pot calcular a partir d'A, B i C.

17. En el pla XY, amb els eixos cartesians habituals, el punt $A = (1, -10)$ es marca sobre la paràbola $y = ax^2 + bx + c$. Després s'esborren els eixos coordenats i quasi tota la paràbola, la qual, això sí, sabem que estava dibuixada en uns eixos paral·lels a les vores del full. Analitzeu bé tots els aspectes del gràfic i digueu quina de les afirmacions següents pot ser falsa.



A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a + b + c < 0$ D) $b^2 > 4ac$ E) $c < 0$

18. En l'expressió

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$$

cada lletra representa un nombre enter i positiu d'una sola xifra, i lletres diferents corresponen a nombres diferents. Quin és el mínim valor enter de l'expressió?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

19. Trobeu la suma de tots els nombres enters positius x més petits que 100 de manera que $x^2 - 81$ sigui un múltiple de 100.

A) 200 B) 100 C) 90 D) 81 E) 50

20. Els germans Andreu i Bru contesten correctament les preguntes sobre la quantitat de membres que formen el seu club d'escacs. L'Andreu diu: *«Tots els membres del nostre club, excepte cinc, són homes»*. En Bru diu: *«En cada equip de sis membres hi ha, com a mínim, quatre dones»*. Quants membres té el club d'escacs?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 12 E) 18

Qüestions de 5 punts

21. En cadascuna de les boles que s'utilitzen per a fer un sorteig hi ha escrit un nombre enter positiu, i cadascuna té un nombre diferent. 30 boles tenen escrit un nombre divisible per 6; 20 boles tenen un nombre divisible per 7, i 10 boles tenen un nombre divisible per 42. Quantes boles hi ha, com a mínim?

A) 30 B) 40 C) 53 D) 54 E) 60

22. Considereu les dues progressions aritmètiques

$$5, 20, 35, 50, 65, \ldots \qquad \text{i} \qquad 35, 61, 87, 113, 139, \ldots$$

Quantes progressions aritmètiques de nombres enters i positius diferents hi ha que continguin les dues progressions anteriors com a subsuccessions?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 26 E) Infinites

23. La successió de funcions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ satisfà les condicions següents:

$$\begin{cases} a)\ f_1(x) = x \\ b)\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)} \end{cases}$$

Determineu el valor de $f_{2011}(2011)$.

A) 2011 B) $-\dfrac{1}{2010}$ C) $\dfrac{2010}{2011}$ D) 1 E) -2011

24. Una caixa conté unes quantes boles vermelles i unes quantes boles verdes. Si escollim aleatòriament dues boles de la caixa, són del mateix color amb una probabilitat de $\frac{1}{2}$. Quina de les quantitats següents pot ser el nombre total de boles que hi ha a la caixa?

A) 81 B) 101 C) 1000 D) 2011 E) 10001

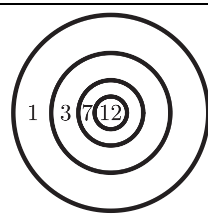
25. Una companyia aèria no cobra cap recàrrec per les maletes si el pes es troba dins un límit. Per cada kg extra es cobra una taxa. L'equipatge del senyor i la senyora Trip pesa 60 kg i han pagat 3 euros. L'equipatge del senyor Wander pesa el mateix però ha pagat 10,50 euros. Quin és el pes màxim que pot portar un passatger sense cap cost addicional?

A) 10 B) 18 C) 20 D) 25 E) 39

26. Els costats AB, BC, CD, DE, EF i FA d'un hexàgon són tots tangents a una certa circumferència. La longitud dels costats AB, BC, CD, DE, EF és 4, 5, 6, 7 i 8, respectivament. Per tant, la longitud del costat FA és:

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6
E) No es pot calcular la longitud de FA només amb aquesta informació

27. Robin Hood dispara i clava tres fletxes en aquesta diana. Quantes puntuacions totals diferents pot aconseguir?



A) 13 B) 21 C) 17 D) 20 E) 19

28. a, b i c són nombres enters i positius de manera que $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Quin és el menor nombre de divisors de $a \cdot b \cdot c$ (incloent-hi 1 i $a \cdot b \cdot c$)?

A) 30 B) 49 C) 60 D) 77 E) 1596

29. Escrivim vint nombres enters, positius i diferents en una taula 4×5. Qualsevol parell de nombres veïns (en cel·les amb un costat comú) tenen un divisor comú més gran que 1. Si n és el nombre més gran de la taula, trobeu el valor més petit possible de n.

A) 21 B) 24 C) 26 D) 27 E) 40

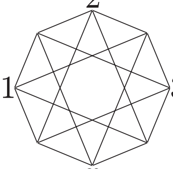
30. Un cub $3 \times 3 \times 3$ està fet amb petits cubs idèntics. Hi ha un pla que és perpendicular a la diagonal del cub gros i que passa pel seu centre. Quants cubs petits interseca aquest pla?

A) 18 B) 21 C) 20 D) 17 E) 19

Cangur SCM 2011 (24 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. En l'octògon de la figura s'han dibuixat vuit diagonals. Volem escriure en cada vèrtex una de les xifres 1, 2, 3 o 4, de manera que en els extrems dels setze segments dibuixats (costats i diagonals) hi haja xifres diferents. Si ja hi hem escrit les tres xifres que es veuen en el dibuix, quantes xifres distintes poden anar en el vèrtex indicat amb la x?



A) Només una B) Dues C) Tres D) Quatre
E) Cap, no es pot completar.

2. Siguen dos cercles coplanaris. El més petit té un radi de 10 cm. La distància entre els centres és de 6 cm. Els cercles només tenen un punt en comú. Quin és el radi del cercle més gran?

A) 12 cm B) 13 cm C) 14 cm D) 15 cm E) 16 cm

3. Els segments AB i AC són perpendiculars. La distància des del punt mitjà del segment BC fins al segment AB és més petita que la distància d'este punt fins al segment AC. Quina de les desigualtats següents és veritat?

A) $AB < AC < BC$ B) $AC < BC < AB$ C) $BC < AB < AC$
D) $AC < AB < BC$ E) $AB < BC < AC$

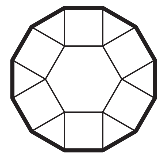
4. Si $2^x = 25$ i $25^y = 64$, aleshores $x \cdot y$ és igual a:

A) 6 B) $\log_2 25 + \log_{25} 64$ C) $\log_2 89$ D) 8 E) $\sqrt{89}$

5. Fem una llista, en ordre ascendent, de tots els números enters i positius de quatre xifres, la suma de xifres dels quals és igual a 4. En quina posició d'esta llista hi ha el número 2011?

A) 7a B) 8a C) 9a D) 10a E) 12a

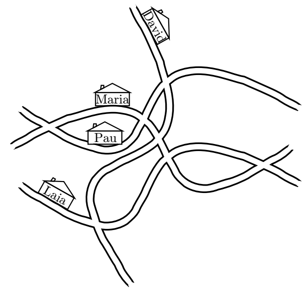
6. El dibuix mostre una figura formada per un hexàgon regular de costat unitat, sis triangles i sis quadrats. Quin és el perímetre de la figura?



A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ B) $6+3\sqrt{2}$ C) 12 D) $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ E) 9

---

7. La Joana, encara que no sap dibuixar gaire bé, ha intentat esbossar un mapa del seu poble. Ha dibuixat quatre avingudes amb els set encreuaments corresponents i les cases dels seus amics, però, en realitat, l'avinguda de la Fletxa, l'avinguda de la Clau i l'avinguda del Regle són totes avingudes rectes. La quarta avinguda és l'avinguda Corba. Quin dels amics de la Joana viu a l'avinguda Corba?



A) David B) Maria C) Laia D) Pau
E) No ho podem saber només mirant el dibuix que ha fet la Joana

---

8. Joana té un dau amb una cara marcada amb un 5, dues cares marcades amb un 4 i tres cares marcades amb un 1. Joan té un altre dau igual que el de Joana. Si Joana i Joan tiren els dos daus simultàniament i sumen els punts, quina és la probabilitat del resultat més probable per a la suma dels punts que marquen els dos daus?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

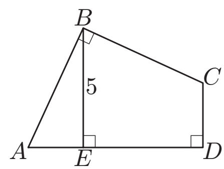
---

9. Andreu escriu els nombres imparells de l'1 al 2011 en una pissarra i, a continuació, Pere esborra tots els múltiples de 3. Quants nombres queden en la pissarra?

A) 335 B) 1005 C) 336 D) 1006 E) 671

---

10. Trobeu l'àrea d'un quadrilàter $ABCD$ (vegeu dibuix) en el qual $AB = BC$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, BE és perpendicular a AD i $BE = 5$.



A) 20 B) 22,5 C) 25 D) 27,5 E) 30

Qüestions de 4 punts

11. Una nau espacial es va desplaçar de la Terra a un planeta molt distant descobert recentment. Quan havia recorregut exactament un quart del camí, va perdre el contacte per ràdio. Aleshores, la nau va viatjar 2^{18} km sense comunicació i just en el moment en què va restablir el contacte, va rebre este missatge: *«Encara heu de recórrer* 2^{19} *km per arribar fins al planeta»*. La distància en quilòmetres des de la Terra al planeta es pot expressar com a potència de 2. Quin és l'exponent d'esta potència?

A) 18 B) 19 C) 22 D) 20 E) 24

12. Miquel vol escriure nombres enters i positius en les cel·les de la taula 3×3, de manera que la suma dels quatre nombres de cada quadrat 2×2 siga 10. Ja ha escrit quatre nombres a la taula, tal com es mostra en la figura. Quin dels nombres següents podria ser la suma dels cinc restants?

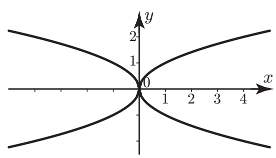
	2	
5		3
	4	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13
E) El que diu l'enunciat no és possible.

13. 36 xiquets d'una escola han anat a esquiar. Deu xiquets tenen exactament un germà que també hi és, sis xiquets hi són amb dos germans més, i vuit xiquets hi són amb tres germans més. Els altres xiquets no tenen cap germà en l'esquiada. Quantes famílies s'han aplegat en esta esquiada?

A) 36 B) 21 C) 18 D) 22 E) 24

14. Quants gràfics de les funcions $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = +\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = +\sqrt{|x|}$ i $y = -\sqrt{|x|}$ hi ha representats en el diagrama de la dreta?

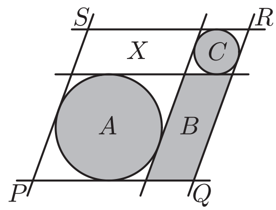


A) Cap B) 2 C) 4 D) 6 E) Tots 8

15. Ariadna, Berta, Carla, Diana i Eugènia fan una cursa en què només poden anar saltant, i cadascuna fa salts sempre de la mateixa longitud. Aquestes longituds són de 70, 80, 85, 90 i 95 cm, respectivament. Totes comencen en el mateix punt al llarg d'una pista circular de 400 metres de longitud encreuada per una rasa de 75 cm d'amplada. La cursa preveu que es facin 10 voltes a la pista i només una xiqueta arriba a la meta: les altres han caigut a la rasa. Qui és la guanyadora? (Observació: haureu de suposar que els peus d'estas xiquetes no tenen dimensions.)

A) És impossible respondre-ho sense més informació.
B) Berta C) Carla D) Diana E) Eugènia

16. Tenim tres línies horitzontals i tres línies inclinades paral·leles entre elles. Els dos cercles són tangents a quatre de les línies. A, B i C són les àrees de les figures ombrejades. Quines àrees, entre les A, B i C, cal conèixer per a poder saber l'àrea del paral·lelogram X ?

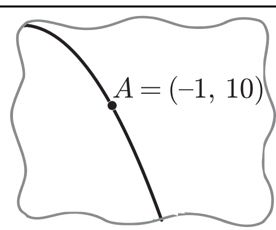


A) A i C B) A C) B D) C
E) X no es pot calcular a partir d'A, B i C.

17. Les cel·les d'una taula 9×9 s'acoloreixen en un d'aquests 3 colors: roig, blau o verd, talment que en qualsevol fila de la taula el nombre de cel·les roges és més gran o igual que el nombre de les cel·les blaves d'aquella fila i també més gran o igual que el nombre de cel·les verdes de la fila; i, en qualsevol columna, el nombre de cel·les blaves és més gran o igual que el nombre de cel·les roges i més gran o igual que el nombre de cel·les verdes. Quin és el mínim nombre mínim de cel·les verdes?

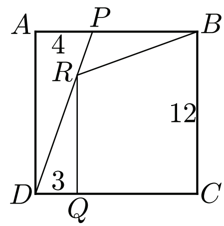
A) 0 B) 9 C) 3 D) 27 E) 10

18. Al pla XY, amb els eixos cartesians habituals, el punt $A = (-1, 10)$ es marca sobre la paràbola $y = ax^2 + bx + c$. Després s'esborren els eixos coordenats i quasi tota la paràbola, la qual, això sí, sabem que s'havia dibuixat en uns eixos paral·lels a les vores del full. Digueu quina de les afirmacions següents pot ser falsa.



A) $b^2 > 4ac$ B) $a < 0$ C) $b < 0$ D) $c < 0$ E) $a - b + c > 0$

19. La figura mostra un quadrat $ABCD$ de costat 12, P i Q són punts dels costats, talment que la distància AP és 4 i la distància DQ és 3. R és el punt del segment PD pel qual RQ és perpendicular a DC. Quina és la distància RB ?



A) $3\sqrt{10}$ B) 9 C) $\dfrac{28}{3}$ D) $\sqrt{72}$ E) $5+\sqrt{12}$

20. Els germans Andreu i Bru contesten correctament les preguntes sobre la quantitat de membres que formen el seu club d'escacs. Andreu diu: *«Tots els membres del nostre club, excepte cinc, són homes»*. Bru diu : *«En cada equip de sis membres hi ha, com a mínim, quatre dones»*. Quants membres té el club d'escacs?

A) 17 B) 11 C) 8 D) 7 E) 6

Qüestions de 5 punts

21. En una bossa hi ha moltes boles numerades amb nombres enters positius; cada bola té un nombre i tots els nombres són diferents. 40 boles tenen escrit un nombre divisible per 5, 30 boles un nombre divisible per 6, i 20 boles, un nombre divisible per 30. Quin és el nombre mínim de boles que hi ha d'haver en la bossa per tal que es complisquin eixes condicions?

A) 40 B) 60 C) 73 D) 90 E) 50

22. En un triangle rectangle la longitud de la hipotenusa és

$$\sqrt{1+3+5+\cdots+25}$$

i les longituds dels dos catets són

$$\sqrt{1+3+5+\cdots+(2m-1)} \quad \text{i} \quad \sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$$

per a dos enters positius $m<n$. Quin és el valor de n?

A) 9
B) 10
C) 12
D) m i n no estan unívocament determinats.
E) No podem trobar dos enters positius que complisquen l'enunciat.

23. La successió de funcions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ satisfà les condicions següents:

$$\begin{cases} a)\ f_1(x) = x \\ b)\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)} \end{cases}$$

Determineu el valor de $f_{2011}(2011)$.

A) 1 B) $-\dfrac{1}{2010}$ C) $\dfrac{2010}{2011}$ D) 2011 E) -2011

24. El rellotge digital de 24 hores de l'habitació marcava l'hora correcta a la mitjanit, quan la primera donyeta hi va aparèixer, i, com que era una sola, va avançar l'hora que marcava el rellotge una hora. A la 1.00, va aparèixer la segona i llavors ja n'eren dues, així que van avançar l'hora que marcava el rellotge dues hores. Després d'una hora, va aparèixer la tercera, etc. Cada hora, començant per la mitjanit, les donyetes avançaven l'hora que marcava el rellotge tantes hores com el nombre de donyetes que en aquell moment s'havien aplegat en l'habitació. Quantes donyetes eren en l'habitació quan van canviar l'hora a la de la mitjanit per primera vegada?

A) 12 B) 15 C) 24 D) 48
E) Mai no tornen a canviar l'hora a la de la mitjanit.

25. Una companyia aèria no cobra cap recàrrec per les maletes si el pes es trobe dins un límit. Per cada quilo extra es cobre un taxa. L'equipatge del senyor i la senyora Trip pesa 80 kg i han pagat 40 €. L'equipatge del senyor Wander pese el mateix però ha pagat 100 €. Quin és el pes màxim que pot portar un passatger sense cap cost addicional?

A) 39 B) 30 C) 20 D) 18 E) 10

26. En l'expressió

$$\frac{C \cdot A \cdot N \cdot G \cdot U \cdot R}{J \cdot O \cdot C}$$

cada lletra representa un nombre enter i positiu d'una sola xifra, lletres diferents corresponen a nombres diferents i el punt volat $(\cdot)$ és el signe de la multiplicació. Quin és el mínim valor enter de l'expressió?

A) 2 B) 10 C) 35 D) 1 E) Un altre valor

27. Calculem el simètric del punt $(0, 2011)$ respecte de la recta $y = mx$. Per quants nombres enters positius, m, aquest simètric és un punt de coordenades enteres?

A) 1
B) 2
C) 3
D) Més de 3, però en un nombre finit.
E) Per infinits nombres enters positius.

28. Si $a = \log_3 5$, $b = \log_5 7$ i $c = \log_7 9$, quina de les respostes següents és certa?

A) $a < b < c$ B) $b < c < a$ C) $c < b < a$ D) $b < a < c$ E) $c < a < b$

29. Una funció f compleix que $f(1) = 2011$ i, a més, pels nombres naturals $n, n \geq 2$,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

Quant és $f(2011)$?

A) $\dfrac{1}{1005}$ B) $\dfrac{2}{2012}$ C) $\dfrac{3}{2011}$ D) $\dfrac{1}{2011}$ E) $\dfrac{1}{670}$

30. Siguen x, y i z nombres racionals, diferents de 0, talment que els nombres $a = x + y + z$ i $b = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ siguen enters. Quin és el valor mínim de $a^2 + b^2$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) 9

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi

Eduard Vázquez Espín (Institut de Pallejà, Pallejà), 105.75 punts

Segon premi

Adrià Balcázar Castell (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 100.25 punts

Tercer premi

Petar Hlad (Joan Pelegrí, Barcelona), 94 punts

Altres premis

Víctor Bustillo Ballester (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 93.25
Albert Ros Lloreta (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 92 punts
Víctor Martínez Abad (Institut Secretari Coloma, Barcelona), 91.25 punts
Ferran Alet Puig (Aula Escuela Europea, Barcelona), 91 punts
Marc Dalmasso Blanch (Claver, Lleida), 89.75 punts
Alejandro Serés Cabasés (Institut Samuel Gili i Gaya, Lleida), 89.25 punts
Marta Porta Comin (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 88 punts
Oscar Comino Trinidad (Institut Manuel Blancafort, La Garriga), 87.75 punts
Óscar Lozano Pérez (Aula Escuela Europea, Barcelona), 85.75 punts
Lluís Laguarda Sanchez (Escola Pia de Mataró, Mataró), 85.5 punts
Sergi Cebrián Gres (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 85 punts
Jie Luan (Institut Montsacopa, Olot), 84 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Eduard Blanch Urban (La Salle Bonanova, Barcelona), 83.75 punts
Miguel Amer Ferrando (Sant Joan Bosco, Barcelona), 83.25 punts
Arnau Guardia Berdiell (Institut Marius Torres, Lleida), 83 punts
Albert Van Eeckhout Alsinet (Institut Montserrat, Barcelona), 82 punts
Marc Clupés Pero (Escola Pia de Mataró, Mataró), 81.75 punts
Lluís Solsona Sabanés (Institut Jaume Balmes, Barcelona), 81.5 punts
Víctor Gullón Altés (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 80.5 punts
Marc Cendra Martínez (Institut Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat),
Gerard Feliu Montesinos (La Salle, Girona),
Teresa Franco Leyva (Aula Escuela Europea, Barcelona) i
Eduardo Gascón Álvarez (Europa, Sant Cugat del Vallès), 80.25 punts

Premis. Balears

Primer premi

Rafael Eusebio López Martínez (Col·legi Sant Josep Obrer I, Palma), 115 punts

Segon premi

Yeray Vivó Valls (IES Joan Alcover, Palma), 86,25 punts

Tercer premi

Miquel Hernández Nicolau (Col·legi La Salle, Palma), 80,75 punts

Altres premis

Maria Francesca Font Picó (IES Josep Sureda i Blanes, Palma), 75,5 punts
Álvaro Morote Derqui (IES Joan Alcover, Palma), 74,5 punts
Filip Andrzej Bugajski (Col·legi CIDE, Palma), 74 punts
Marino González Díaz (IES Francesc de Borja Moll, Palma), 71,5 punts
Catalina Serra Tomàs (IES Joan Alcover, Palma), 70,5 punts
Leonard Witte (IES Guillem Cifre de Colonya, Pollença), 70,25 punts
Adrià Salom Rullan (IES Madina Mayurqa, Palma), 70 punts

Premis. País Valencià

Primer premi

Diego Monserrat López (IES La Plana, Castelló de la Plana), 98.25 punts

Segon premi

Jorge Peña Queralta (IES L'Almadrava, Benidorm), 97.25 punts

Tercer premi

Rafael Borrás Pernas (IES Francesc Ribalta, Castelló de la Plana), 94 punts

Altres premis

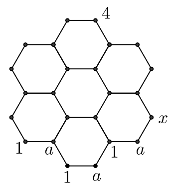
Juan Falomir Ortí (IES Vicenta Ferrer Escrivà, València) i
Oscar Miguel Escrig (IES Francesc Ribalta, Castelló de la Plana), 89.25 punts
Cristian Navas Martorell (IES Enric Soler i Godes, Benifaió), 88 punts
David Ribo Pérez (IES Vicenta Ferrer Escrivà, València), 85 punts
Alex Arenas Ferrer (IES Vicenta Ferrer Escrivà, València), 84.5 punts
Javier Barahona Albiol (IES La Plana, Castelló de la Plana), 83.25 punts
Jethro David Howard (IES Gabriel Ciscar, Oliva), 80.75 punts

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. A. 1.

Vegeu a la figura de la dreta que x ha de ser necessàriament $x = 1$. Podeu veure, doncs, que no ens cal el 4 per saber el valor de x; això sí, amb el 4 podem deduir que la suma de cada segment és 5.



2. A. Agnès, Hana, Isabel.

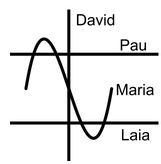
Si la Isabel i l'Agnès es van avançar 9 vegades van intercanviar les seves posicions; això mateix succeeix amb la Isabel i la Hana; en canvi l'Agnès i la Hana, com que es van avançar 10 vegades van arribar en el mateix ordre que estaven just després de la sortida. Si aleshores anaven Isabel-Agnès-Hana al final les posicions seran Agnès-Hana-Isabel.

3. A. 5.

Com que $32 = 15^y = (2^x)^y = 2^{x \cdot y}$ i $32 = 2^5$ aleshores $x \cdot y = 5$.

4. C. Maria.

L'avinguda on viu la Maria talla dos cops al carrer d'en Pau, un cop al carrer d'en David i dos cops al carrer de la Laia i, doncs, forçosament aquesta ha de ser l'avinguda Corba. Si mireu els altres talls constatareu que l'esquema correcte seria com el que teniu a la dreta.

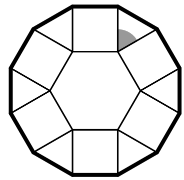


5. D. 9a.

Els nombres amb 4 xifres que sumen 4 poden estar formats per les xifres 4000, o bé 3100, o bé 2200, o bé 2110, o bé 1111, en els diferents ordres possibles. La llista comença amb el 4000, segueix amb els tres que comencen per 3 (3100, 3010, 3001), i a continuació ja venen els que comencen per 2, en aquest ordre 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002. El 2011 ocupa la novena posició.

6. E. 12.

En un vèrtex de l'hexàgon concorren dos quadrats i un triangle. L'angle interior de l'hexàgon mesura $120°$ i per tant l'angle del triangle és $360° - 120° - 2 \cdot 90° = 60°$. Per tant el triangle és equilàter i el dodecàgon és regular amb un perímetre de 12 unitats.

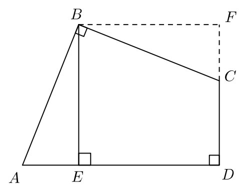


7. C.

Com que la figura resultant ha de tenir simetria, la corba demanada no podrà ser la D). Com que la corba resultant ha de ser derivable no podrà ser la A) ni la E), no derivables en el punt més alt, ni tampoc la B) que no resultaria derivable en el seu punt més baix.

8. C. 25 cm^2.

Si construim el triangle rectangle BCF perllongant CD i fent $BF \perp DF$ aleshores, com que les hipotenuses són iguals per l'enunciat i els angles aguts en B són iguals perquè tenen els costats perpendiculars resulta que el polígon $EDFB$ és un quadrat de costat 5 cm que té la mateixa àrea que el quadrilàter $ABCD$.



9. C. 671.

A la llista dels nombres imparells de 1 a 2011 hi ha $\dfrac{2011-1}{2} + 1 = 1006$ nombres. Com que 2010 és múltiple de 3, a la llista de tots els nombres enters de 1 a 2011 hi ha $\dfrac{2010}{3} = 670$ múltiples de 3, però els que siguin múltiples de 6 no seran a la llista que estem estudiant; com que 2010 també és múltiple de 6, d'aquests n'hi ha $\dfrac{2010}{6} = 335$ i, doncs, a la llista inicial hi ha $670 - 335 = 335$ múltiples de 3 que seran els que esborrarà en Pere. Quedaran a la llista $1006 - 335 = 671$ nombres.

10. B. 5.

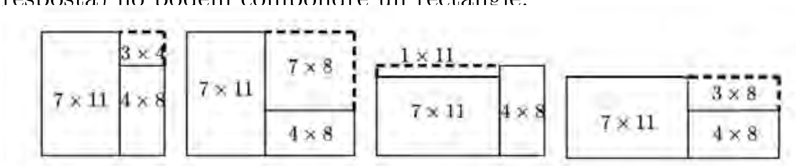
Quan es llancen n daus, la probabilitat que no surti cap 6 és $p(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ i la probabilitat que surti exactament un 6 és $p(1) = n \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Si han de ser iguals $p(0) = p(1)$, es dedueix $\frac{5}{6} = n \cdot \frac{1}{6}$ i, per tant, $n = 5$.

Qüestions de 4 punts

11. D. 7×8.

A la figura següent es mostren els únics quatre possibles rectangles que es poden compondre amb els dos que ja tenim i un altre. És clar que el de 7×8 és el d'àrea més gran de tots quatre i, per tant, el que dóna lloc a un rectangle sencer d'àrea més gran.

A la figura hi apareixen rectangles corresponents a quatre de les opcions de resposta; amb dos rectangles de 7×11 i un de 4×8 (que seria l'altra opció de resposta) no podem compondre un rectangle.



12. E. Cap dels anteriors és possible.

Indiquem com x el nombre de la primera casella; a la dreta podeu veure la taula completada. Aleshores la suma dels cinc nombres que no coneixíem és $S = x + x - 2 + 7 - x + x - 2 + x - 4 = 3x - 1$, és a dir que ha de ser un múltiple de 3 menys 1. Cap dels quatre nombres 9, 10, 12 o 13 compleix aquesta condició.

x	2	$x-2$
1	$7-x$	3
$x-2$	4	$x-4$

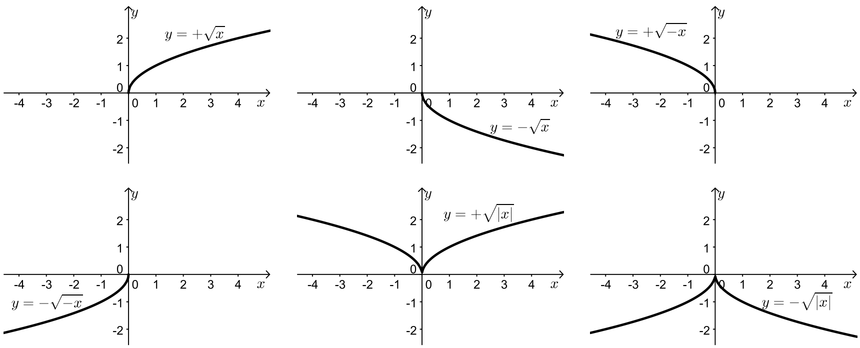
13. D. 36.

Els 6 nens que tenen un germà pertanyen a 3 famílies; els 9 nens que tenen dos germans seran de 3 famílies diferents; finalment els 4 nens que tenen 3 germans seran tots de la mateixa família. Fins aquí hem comptat 19 nens dels 48 components del grup; els 29 restants són tots de famílies diferents. El nombre total de famílies és doncs $3 + 3 + 1 + 29 = 36$.

14. D. 6.

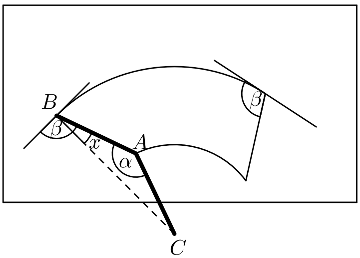
Com que l'eix de les x és horitzontal, veiem de seguida que no hi ha cap de les dues paràboles que són la gràfica de les funcions $y = x^2$ i $y = -x^2$.

Tot seguit podeu veure que les gràfiques de les altres funcions sí que hi són.



15. B. $\pi - \dfrac{\alpha}{2}$.

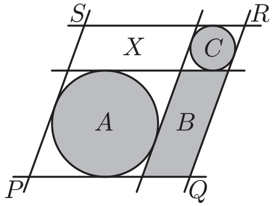
L'angle β que es demana és el mateix que, en qualsevol posició de l'eixugaparabrises formen l'escombreta w i la tangent al cercle que determina l'extrem de l'escombreta.



Aleshores amb les denominacions de la figura el triangle CAB és isòsceles i, doncs, en radiants, $x = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$. Ara bé, com que CB és un radi del cercle que constitueix la vora superior corbada de l'àrea escombrada és perpendicular a la tangent i, per tant $\beta = \dfrac{\pi}{2} + x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi - \alpha}{2} = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$.

16. B. B.

Si un paral·lelogram té un cercle inscrit, el paral·lelogram és un rombe. A partir d'aquest fet es dedueix que el paral·lelogram d'àrea B i el paral·lelogram d'àrea X són iguals. Per tant, quan coneixem B ja coneixem X. Les àrees A i C no determinen ni B ni X.



17. E. $c < 0$.

A partir d'una anàlisi acurada de la figura de l'enunciat, que mostra un fragment de la gràfica de $y = ax^2 + bx + c$ deduïm que:

• La paràbola té un mínim i, per tant, $a > 0$

• L'abscissa del vèrtex $v = \dfrac{-b}{2a} > 1$ i, com que ja sabem que $a > 0$ veiem que ha de ser $b < 0$.

• Com que l'ordenada del mínim és negativa, la funció té dues arrels reals i, per tant, el discriminant és positiu: $b^2 > 4ac$.

• Es compleix $f(1) = a + b + c = -10 < 0$.

• En canvi pot ser $c < 0$, $c = 0$ o bé $c > 0$ segons quin sigui el valor de l'arrel més petita de la funció, negatiu, 0 o positiu. Exemples: $y = x^2 - 6x - 5$, $y = x^2 - 11x$ i $y = x^2 - 16x + 5$.

18. B. 2.

Comencem per observar que G i A no influeixen en el resultat; se simplifiquen. Si volem el mínim valor per a l'expressió hem de pensar que M i E prenguin els màxims valors possibles, 8 i 9, però també hem de veure si es pot complir el que diu l'enunciat, que el resultat sigui enter i, alhora, fent servir els nombres més petits possible per al numerador. Això ho aconseguim posant $O = 1$ i, com que un 5 al numerador no es podria simplificar per tal que el resultat fos enter, amb $\{K, A, N, R\} = \{2, 3, 4, 6\}$.

19. A. 200.

Ha de ser $x^2 - 81 = 100n$, és a dir $x^2 = 100n + 81$. Deduïm que x ha d'acabar en 9 (podria ser $x = 10k+9$ per k enter i $0 \leq k \leq 9$) o en 1 (podria ser $x = 10r + 1$ amb r enter i $1 \leq k \leq 9$).

En el primer cas tindrem $x^2 = (10k + 9)^2 = 100k^2 + 180k + 81$ i, a fi i efecte que aquest valor sigui un múltiple de 100 més 81, resulta que $180k$ ha de ser múltiple de 100 i això, per als valors de k que interessen només ho compleixen $k = 0$ i $k = 5$, que ens donen $x = 9$ i $x = 59$.

En el segon cas trobem $x^2 = (10r + 1)^2 = 100r^2 + 20r + 1$ expressió que podem reescriure com $100r^2 + 20(r - 4) + 81$ i deduïm que $20(r - 4)$ ha de ser múltiple de 100 cosa que succeeix per $r = 4$ i per $r = 9$, que ens donen $x = 41$ i $x = 91$. Els quatre valors de x que hem trobat sumen 200.

20. B. 7.

Posem que al club hi ha H homes i D dones. Com que en Bru i l'Andreu són del club, $H \geq 2$. Com que tots, excepte 5 membres, són homes ha de ser $D = 5$. Finalment, com que a cada equip de 6 membres que es pugui formar hi ha, com a mínim, 4 dones ha de ser exactament $H = 2$, ja que si fos $H \geq 3$ ja podríem formar un equip de 3 homes i 3 dones, contra el que estableix l'enunciat. Per tant $H = 2$ i $D = 5$.

Qüestions de 5 punts

21. B. 40.

La mínima quantitat possible de boles a la bossa s'obtindrà quan no n'hi hagi cap més que les que indica l'enunciat. Com que els múltiples de 42 també ho són alhora de 6 i de 7 és segur que hi ha com a mínim $30 + 20 - 10$ nombres. Els múltiples de 42 constitueixen la intersecció del conjunt de múltiples de 6 i el conjunt de múltiples de 7 i els hem de restar de la quantitat total perquè en fer $30 + 20$ els havíem comptat dues vegades.

22. C. 5.

Com que una de les progressions aritmètiques té diferència 15 i l'altra té diferència 26 i el mcd(15,26)=1, una altra progressió aritmètica que les contingui totes dues com a subsuccessions ha de tenir forçosament diferència 1. Com que ha de ser de nombres enters positius diferents i n'ha de formar part el 5 les úniques progressions que ho poden complir són aquestes cinc: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$, $\{4, 5, 6, \ldots\}$, $\{5, 6, \ldots\}$.

23. A. 2011.

A partir de $f_1(x) = x$ i $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ podem obtenir successivament $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $f_3(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \dfrac{x-1}{x}$; $f_4(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$ i, doncs, la successió de funcions té cicle 3.

Com que el residu de la divisió de 2011 per 3 és 1 resulta que $f_{2011}(x) = f_1(x) = x$ i, per tant, $f_{2011}(2011) = 2011$.

24. A. 81.

Si indiquem amb t el nombre total de boles a la bossa i amb r el nombre de boles roges, $t - r$ serà el nombre de boles verdes.

La probabilitat que surtin dues boles roges és $\dfrac{r(r-1)}{t(t-1)}$ i la probabilitat que surtin dues boles verdes és $\dfrac{(t-r)(t-r-1)}{t(t-1)}$.

La probabilitat que surtin dues boles del mateix color és

$$\frac{r(r-1)}{t(t-1)} + \frac{(t-r)(t-r-1)}{t(t-1)} = \frac{1}{2}.$$

Si operem en aquesta igualtat arribem a $4r^2 - 4tr + t^2 - t = 0$. Aïllem r amb la fórmula de l'equació de segon grau, simplifiquem i obtenim $r = \dfrac{t + \sqrt{t}}{2}$.

Com que r ha de ser un nombre enter, veiem que t ha de ser un quadrat perfecte i, recíprocament, si t és un quadrat perfecte, com que t i $\sqrt{t}$ tenen la mateixa paritat r és un nombre enter i t és solució del problema. De les opcions de resposta l'única que és quadrat perfecte és 81.

25. D. 25.

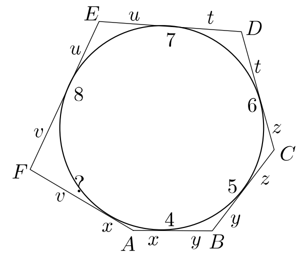
Si x és el pes màxim sense cost i t és la taxa per quilo extra, l'enunciat es tradueix així:

$$\begin{cases} (60 - 2x)t = 3 \\ (60 - x)t = 10,5 \end{cases}$$

Si resolem el sistema d'equacions resulta $x = 25$.

26. D. 6.

La figura de la dreta mostra un esquema de l'enunciat i hem posat distàncies x, y, z, t, u, v que descomponen els costats a partir de la condició de tangència dels sis costats a la circumferència. Tenim que $x + y = 4$, $y + z = 5$, $z + t = 6$, $t + u = 7$ i $u + v = 8$ i volem trobar el valor de $v + x$.



Si sumem la primera, la tercera i la cinquena de les condicions anteriors i per altra banda la segona i la quarta, obtenim

$$\begin{cases} x + y + z + t + u + v = 18 \\ \qquad\quad y + z + t + u = 12 \end{cases}$$

d'on deduïm, restant les dues equacions, $x + v = 6$.

27. E. 19.

El nombre de "possibles sumes" diferents de 3 sumands triats en $\{1, 3, 7, 12\}$, sense tenir en compte l'ordre, és $CR_4^3 = \binom{4+3-1}{3} = 20$, però cal estudiar en quants casos poden aparèixer resultats repetits. Si escrivim totes les possibles sumes veurem que això només succeeix per a $3 + 3 + 3 = 7 + 1 + 1$ i, per tant, hi ha 19 resultats diferents de les sumes.

28. D. 77.

De les condicions que imposa l'enunciat se'n dedueix que a, b i c han de tenir tots tres com a mínim els factors 2 i 3. Si busquem que $a \cdot b \cdot c$ tingui el menor nombre de divisors això succeirà quan només tinguin aquests factors: $a = 2^x \cdot 3^y$, $b = 2^z \cdot 3^t$ i $c = 2^u \cdot 3^v$ i, per tant $a^2 = 2^{2x} \cdot 3^{2y}$, $2b^3 = 2^{3z+1} \cdot 3^{3t}$ i $3c^5 = 2^{5u} \cdot 3^{5v+1}$ d'on es dedueix que s'ha de complir $2x = 3z + 1 = 5u$ i $2y = 3t = 5v + 1$. Les solucions mínimes, que són les que donen la solució del problema, són: $x = 5, z = 3, u = 2$ i $y = 2, t = 3, v = 1$ d'on $a \cdot b \cdot c = 2^{10} \cdot 3^6$, que té $11 \cdot 7 = 77$ divisors.

29. C. 26.

Tot seguit teniu la imatge d'una taula per a la qual el nombre més gran de la taula és $n = 26$.

22	4	2	14	7
18	16	8	12	21
9	24	26	20	15
3	6	10	5	25

No es pot tobar una taula per a la qual el nombre màxim sigui més petit que 26 perquè:

• No hi pot haver l'11 perquè a les cel·les veïnes hi hauria d'haver com a mínim 22 i 33.

• Per raons semblants no hi pot haver ni el 13, ni el 17, ni el 19, ni el 23.

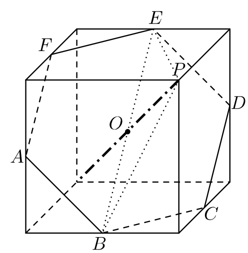
• És clar que tampoc no hi pot haver l'1.

A les taules anteriors tenim la llista dels 20 nombres més petits sense $\{1, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

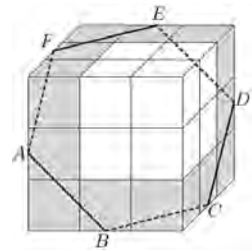
30. E. 19.

Demostrarem que un pla perpendicular a la diagonal d'un cub pel seu punt mitjà talla el cub en una secció que és un hexàgon regular que té per vèrtexs els punts mitjans de 6 arestes del cub. I veurem que, a partir d'aquesta propietat, es dedueix que en la situació de l'enunciat el pla interseca 19 petits cubs.

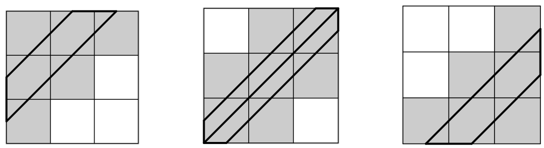
Si P és un dels vèrtexs que determinen la diagonal i E i B són els punts mitjans de dues arestes com es veu a la figura, $PB = PE$ i, per tant, en el pla PBE, P és un punt de la mediatriu de BE que passa per O, centre del cub. Així es dedueix que la diagonal $PO \perp BE$. De manera semblant es deduiria que la diagonal $PO \perp AD$. Per tant el pla que passa per $ABDE$ és el pla perpendicular a la diagonal que passa per O.



És clar que el pla talla el cubet central (ja en tenim 1). Com que el que acabem de dir és vàlid tant per al cub gran com per al cub petit central es raona de seguida que el pla interseca també amb els petits cubs centrals de cada una de les cares perquè les interseccions del pla amb el cub central també són interseccions amb aquests cubs (ja tenim 6 cubs intersecats més). La figura de la dreta ensenya quins altres cubs petits exteriors interseca el pla (12, comptant els del darrere). En total, doncs, són 19 els petits cubs afectats.

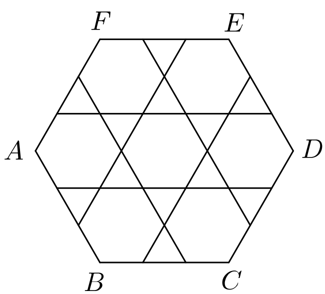


Comptem-ho d'una altra manera: al pis de dalt, 6 cubets, al del mig 7 cubets, al de baix 6 cubets afectats.



Pis de dalt   Pis del mig   Pis de baix

Per acabar mostrem quina és la secció que el pla determina en la col·lecció de petits cubs que componen el cub gran.

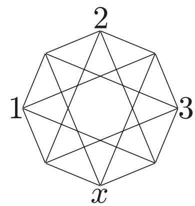


Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. C. 3.

El vèrtex entre el punt 2 i el 3 ha tenir el 4 perquè també hi arriba un segment que surt de l'1. Per la mateixa raó el vèrtex entre el 2 i l'1 ha de tenir el 4. El vèrtex següent al 3 en sentit horari també ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents de l'1 i del 2. I el vèrtex següent a l'1 en sentit antihorari ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents del 2 i del 3. Per tant el punt indicat amb x queda unit amb quatre 4 i, doncs, allà hi pot anar qualsevol dels altres tres nombres.

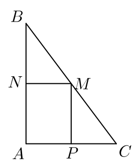


2. E. 16 cm.

Els dos cercles han de ser tangents. Si la distància d entre centres és de 6 cm i el radi r del cercle que ja coneixem és de 10 cm, els dos cercles han de ser tangents de manera que un sigue interior a l'altre. Si el que busquem ha de ser més gran que el que coneixem $R = r + d = 10 + 6 = 16$ cm.

3. D. $AC < AB < BC$.

Donat que l'angle $\angle A$ és recte, el triangle $\triangle ABC$ és rectangle, i BC n'és la hipotenusa. Si marquem els segments per trobar les distàncies des del punt M, punt mitjà de BC als costats AB i AC, a la figura s'observen 2 triangles iguals, $\triangle NBM = \triangle PMC$, semblants a $\triangle ABC$ Com que a partir de l'enunciat $MN < MP = BN$, fent ús del Teorema de Tales es dedueix que $AC < AB$ i com que estos són els catets de $\triangle ABC$ i BC és la hipotenusa, més gran que els catets, serà $AC < AB < BC$.



4. A. 6.

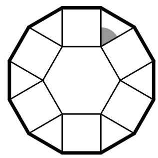
Com que $64 = 25^y = (2^x)^y = 2^{x \cdot y}$ i $64 = 2^6$ aleshores $x \cdot y = 5$.

5. E. 12a.

Els nombres amb 4 xifres que sumen 4 poden estar formats per les xifres 4000, o bé 3100, o bé 2200, o bé 2110, o bé 1111, en els diferents ordres possibles. La llista comença amb tots els que tenen primera xifra un 1, que són 10 nombres, a saber (no indicats per ordre) el que està format per quatre 1, sis que tenen un 1 seguit de un 1, un 2 i un 0 i tres que tenen un 1 seguit de un 3 i dos 0. i a continuació ja venen els que comencen per 2, en aquest ordre 2002, 2011. El 2011 ocupa la dotzena posició.

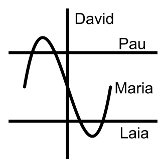
6. C. 12.

En un vèrtex de l'hexàgon concorren dos quadrats i un triangle. L'angle interior de l'hexàgon mesura 120° i per tant l'angle del triangle és $360° - 120° - 2 \cdot 90° = 60°$. Per tant el triangle és equilàter i el dodecàgon és regular amb un perímetre de 12 unitats.



7. C. Maria.

L'avinguda on viu la Maria talla dos cops al carrer de Pau, un cop al carrer de David i dos cops al carrer de Laia i, per tant, forçosament aquesta ha de ser l'avinguda Corba. Si mireu els altres talls constatareu que l'esquema correcte seria com el que teniu a la dreta.



8. A. $\frac{1}{3}$.

Possiblement la manera més ràpida de trobar la probabilitat dels resultats que poden aparèixer quan fem la suma de les puntuacions dels dos daus és amb una taula de doble entrada. D'esta manera observem 36 situacions equiprobables, de les quals el 5 és el valor que apareix més, 12 vegades. La probabilitat d'obtenir un 5 és, doncs, $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

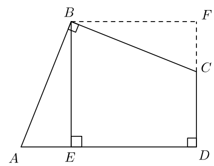
	5	4	4	1	1	1
5	10	9	9	6	6	6
4	9	8	8	5	5	5
4	9	8	8	5	5	5
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2

9. E. 671.

A la llista dels nombres imparells de 1 a 2011 hi ha $\dfrac{2011-1}{2}+1=1006$ nombres. Com que 2010 és múltiple de 3, a la llista de tots els nombres enters de 1 a 2011 hi ha $\dfrac{2010}{3}=670$ múltiples de 3, però els que siguin múltiples de 6 no seran a la llista que estem estudiant; com que 2010 també és múltiple de 6, d'aquests n'hi ha $\dfrac{2010}{6}=335$ i, doncs, a la llista inicial hi ha $670-335=335$ múltiples de 3 que seran els que esborrarà en Pere. Quedaran a la llista $1006-335=671$ nombres.

10. C. 25 cm^2.

Si construïm el triangle rectangle BCF perllongant CD i fent $BF \perp DF$ aleshores, com que les hipotenuses són iguals per l'enunciat i els angles aguts en B són iguals perquè tenen els costats perpendiculars resulta que el polígon $EDFB$ és un quadrat de costat 5 cm que té la mateixa àrea que el quadrilàter $ABCD$.



Qüestions de 4 punts

11. D. 20.

Si d és la distància que ens demanen, quan es perd el contacte per ràdio s'ha recorregut $\dfrac{d}{4}$ i el que manca per recórrer és $\dfrac{3d}{4}=2^{18}+2^{19}=2^{18}\cdot(1+2)=3\cdot 2^{18}$ i d'aci es dedueix $d=4\cdot 2^{18}=2^{20}$.

12. E. El que diu l'enunciat no és possible..

Si indiquem com x el nombre de la primera fila i la primera columna, aleshores a la casella central hi ha d'anar $3-x$ i a la casella de la tercera fila primera columna hi ha d'anar $-2+x$. No pot ser que aquests tres nombres, x, $3-x$ i $-2+x$ siguin enters i positius.

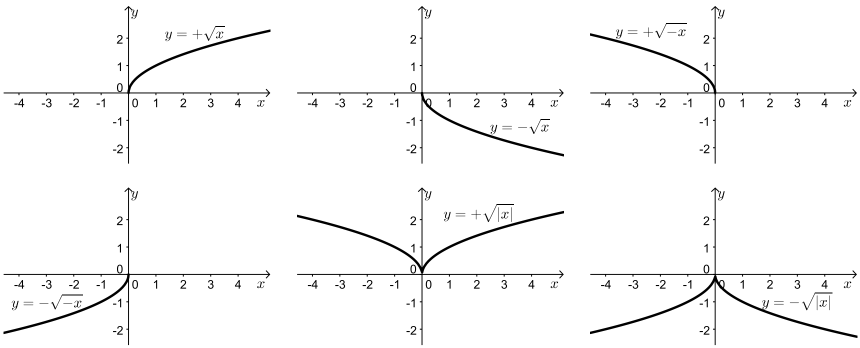
13. B. 21.

Els 10 xiquets que tenen un germà pertanyen a 5 famílies; els 6 xiquets que tenen dos germans seran de 2 famílies diferents; finalment els 8 xiquets que tenen 3 germans seran de 2 altres famílies. Fins aquí hem comptat 24 nens dels 36 components del grup; els 12 restants són tots de famílies diferents. El nombre total de famílies és doncs $5+2+2+12=21$.

14. D. 6.

Com que l'eix de les x és horitzontal, veiem de seguida que no hi ha cap de les dues paràboles que són la gràfica de les funcions $y = x^2$ i $y = -x^2$.

Tot seguit podeu veure que les gràfiques de les altres funcions sí que hi són.

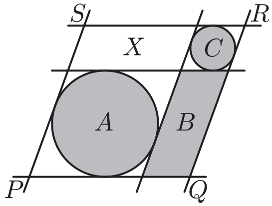


15. B. Berta.

És clar que Ariadna, que fa salts de 70 cm, a la primera volta caurà a la rasa.
Com que la longitud de la pista, és a dir 40000 cm, és un múltiple de 80 cm, resulta que si la rasa està col·locada en un lloc que fa que la Berta la salti a la primera volta ja la saltarà sempre.
Pel que fa a la Carla, per saltar la rasa a la primera volta ha de quedar-hi a una distància d'entre 0 i 10 cm; com que el residu de dividir 40000 per 85 dóna 50, a la segona volta hi quedarà entre 50 i 60 cm i quan faci el següent bot caurà a la rasa.
La Diana en la primera volta ha de quedar entre 0 i 15 cm de la rasa i com que si dividim 40000 per 90 dóna 40 de residu, a la segona volta hi quedarà entre 40 i 55 cm i tot seguit hi caurà.
També l'Eugènia haurà caigut a la rasa. El residu de 40000 dividit per 95 dóna 5. Abans de caure-hi, quedarà de la rasa entre 0 i 20 cm, entre 5 i 25,... , entre 25 i 30 (a la sisena volta) i aleshores ja hi caurà segur; aquest és el cas més favorable perquè sgeons la posició de la rasa hi pot caure abans.
És a dir, si una xiqueta ha arribat al final de la cursa després de fer 10 voltes, només pot ser la Berta.

16. C. B.

Si un paral·lelogram té un cercle inscrit, el paral·lelogram és un rombe. A partir d'aquest fet es dedueix que el paral·lelogram d'àrea B i el paral·lelogram d'àrea X són iguals. Per tant, quan coneixem B ja coneixem X. Les àrees A i C no determinen ni B ni X.



17. B. 9.

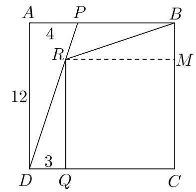
Per a cada fila, el nombre de cel·les roges de la fila és més gran que el de cel·les blaves, i per a cada columna, el nombre total de cel·les blaves de la columna és més gran que el de cel·les roges. Sumant per files i per columnes els nombres de cel·les roges i blaves, açò força que el nombre total de cel·les roges i el nombre total de cel·les blaves han de coincidir. Per tant el nombre de cel·les verdes és senar i com que ha de ser més petit que el de cel·les roges (o blaves) no pot superar $81/3 = 27$: serà un nombre senar entre 9 i 27.
Però com que l'enunciat pregunta pel mínim valor possible del nombre de cel·les verdes, si trobem una configuració que en té 9 ja haurem acabat. Ho compleix la que té boles verdes a la diagonal i la disposició de les boles per files és, ordenadament, la següent: VRBRBRBRB, BVRBRBRBR, RBVRBRBRB, BRBVRBRBR, RBRBVRBRB, BRBRBVRBR, RBRBRBVRB, BRBRBRBVR, RBRBRBRBV

18. D. $c < 0$.

A partir d'una anàlisi acurada de la figura de l'enunciat, que mostra un fragment de la gràfica de $y = ax^2 + bx + c$ deduïm que:
• La paràbola té un màxim i, per tant, $a < 0$
• L'abscissa del vèrtex $v = \dfrac{-b}{2a} < -1$ i, com que ja sabem que $a < 0$ veiem que ha de ser $b < 0$.
• Com que l'ordenada del màxim és positiva, la funció té dues arrels reals i, per tant, el discriminant és positiu: $b^2 > 4ac$.
• Es compleix $f(-1) = a - b + c = 10 > 0$.
• En canvi pot ser $c < 0$, $c = 0$ o bé $c > 0$ segons que l'arrel de la funció que queda més a la dreta sigui positiva, zero o negativa.
Exemples: $y = -x^2 - 6x + 5$, $y = -x^2 - 11x$ i $y = -x^2 - 16x - 5$.

19. A. $3\sqrt{10}$.

Els triangles APD i QDR són semblants. Aleshores $\dfrac{RQ}{12} = \dfrac{3}{4}$ d'on $RQ = 9$. Per tant, el triangle rectangle MBR té el catets $MR = 12-3 = 9$ i $MB = 12-9 = 3$ i la hipotenusa n'és $BR = \sqrt{9^2+3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.



20. D. 7.

Posem que al club hi ha H homes i D dones. Com que en Bru i l'Andreu són del club, $H \geq 2$. Com que tots, excepte 5 membres, són homes ha de ser $D = 5$. Finalment, com que a cada equip de 6 membres que es pugui formar hi ha, com a mínim, 4 dones ha de ser exactament $H = 2$, ja que si fos $H \geq 3$ ja podríem formar un equip de 3 homes i 3 dones, contra el que estableix l'enunciat. Per tant $H = 2$ i $D = 5$.

Qüestions de 5 punts

21. E. 50.

La mínima quantitat possible de boles a la bossa s'obtindrà quan no n'hi hagi cap més que les que indica l'enunciat. Com que els múltiples de 30 també ho són alhora de 5 i de 6 és segur que hi ha com a mínim $40+30-20$ nombres. Els múltiples de 30 constitueixen la intersecció del conjunt de múltiples de 5 i el conjunt de múltiples de 6 i els hem de restar de la quantitat total perquè en fer $40+30$ els havíem comptat dues vegades.

22. C. 12.

És sabut que la suma dels k primers nombres enters positius imparells és k^2. En efecte: $1+3+(2k-1) = \dfrac{(1+2k-1)k}{2} = k^2$.

Per tant la hipotenusa fa 13 unitats i els catets, m i n , enters positius amb $m < n < 13$. Ara bé, com que $13 < m+n < 2n$ serà $7 \leq n < 13$. L'única solució de $m^2+n^2 = 13^2$ en aquest interval de nombres enters la dóna la coneguda terna pitagòrica (5, 12, 13) i resulta $n = 12$.

23. D. 2011.

A partir de $f_1(x) = x$ i $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ podem obtenir successivament

$$f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

i, doncs, la successió de funcions té cicle 3.

Com que el residu de la divisió de 2011 per 3 és 1 resulta que $f_{2011}(x) = f_1(x) = x$ i, per tant, $f_{2011}(2011) = 2011$.

24. E. Mai no tornen a canviar l'hora a la de la mitjanit.

A les 0 h canvien el rellotge a la 1 h; a la 1 h marca 2 h i com que arriben 2 donyetes el canvien a les 4 h; a les 2 h marca 5 h i canvien al rellotge a les 8 h. A cada hora en punt, l'hora que passarà a marcar el rellotge després del canvi serà la suma de l'hora real i les hores avançades per les donyetes. Per canviar l'hora a la de la mitjanit en algun moment, aquesta suma ha de ser un múltiple de 24. Si això ha de passar en el moment que s'han aplegat n donyetes a l'habitació l'hora real seran les $n-1$ hores i el nombre d'hores avançades serà $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Hauria de ser, doncs, $n - 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2} = 24k$ i també $n^2 - 3n + 2 = 48k$, però $n^2 - 3n + 2$ no és mai múltiple de 48 perquè no és mai múltiple de 3. Per provar-ho basta substituir en $N = n^2 - 3n + 2$, $n = 3a$ i veurem que N resulta un múltiple de 3 menys 2; $n = 3a - 1$ i aleshores N és un múltiple de 3 més 1; $n = 3a + 1$ i N és un múltiple de 3 menys 1. Per tant N no és mai múltiple de 3.

25. B. 30.

Si x és el pes màxim sense cost i t és la taxa per quilo extra, l'enunciat es tradueix així:

$$\begin{cases} (80 - 2x) \cdot t = 40 \\ (80 - x) \cdot t = 199 \end{cases}$$

Si resolem el sistema d'equacions resulta $x = 30$.

26. A. 2.

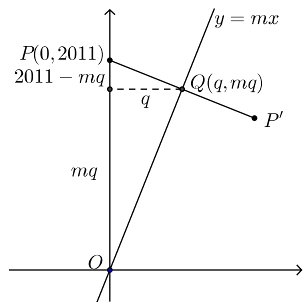
Comencem per observar que la C no influeix en el resultat de l'expressió perquè se simplifica. Si volem obtenir el mínim valor hem de pensar que J i O prenguin els màxims valors possibles, 8 i 9. Tanmateix hem de vore si aixina es pot complir el que diu l'enunciat, que el resultat sigui enter i, alhora, fent servir els nombres més petits possible per al numerador. Com que un 5 al numerador no es podria simplificar per tal que el resultat fos enter, haurem de prendre $\{A, N, G, U, R\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ i el resultat de l'expressió de l'enunciat és 2.

27. A. 1.

Posem $P(0, 2011)$, P' el simètric de P respecte la recta $y = mx$ i $Q(q, mq)$ el punt mitjà del segment PP'. Les coordenades de P' són $(2q, 2mq - 2011)$. Si apliquem el teorema de l'altura en el triangle rectangle OPQ trobem $q^2 = mq(2011 - mq)$.

D'ací se'n dedueix $q = \dfrac{2011m}{1 + m^2}$ i

$$P' = (\frac{2011 \cdot 2m}{m^2 + 1}, \frac{2011 \cdot (m^2 - 1)}{m^2 + 1}).$$



Perquè les coordenades siguen enteres, caldrà que $m^2 + 1$ dividisca $m^2 - 1$ ja que 2011 és un nombre primer, però com que $m^2 + 1 > m^2 - 1$ i ha de ser $m \geq 1$ només serà possible que $m^2 + 1$ sigui divisor de $m^2 - 1$ si $m^2 - 1 = 0$. Serà $m = 1$, que també divideix $2m$ Aquesta única recta correspon a la bisectriu dels quadrants 1r i 3r i el simètric de (0,2011) és (2011,0).

28. C. $c < b < a$.

Els tres nombres de l'enunciat, $a = \log_3 5$, $b = \log_5 7$ i $c = \log_7 9$ són els valors de la funció $f(x) = \log_x (x + 2) = \dfrac{\ln (x + 2)}{\ln x}$ per a $x = 3, 5, 7$.

La funció f és decreixent. Per veure-ho calculem i operem i obtenim

$$f'(x) = \frac{x \ln x - (x + 2) \ln(x + 2)}{x(x + 2)(\ln(x + 2))^2}.$$

A partir del fet que la funció ln és creixent, podem assegurar que si $x > 0$ aleshores $f'(x) < 0)$. Per tant $f(3) > f(5) > f(7)$ és a dir $a > b > c$.

29. B. $\dfrac{2}{2012}$.

A partir de la condició que imposa l'enunciat podem deduir una fórmula recurrent per a la funció f. Com que serà

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1)$$

obtenim $(n-1)^2 f(n-1) + f(n) = n^2 f(n)$ i d'ací $f(n) = \dfrac{n-1}{n+1} f(n-1)$.

Es pot observar aleshores que $f(2) = \dfrac{2011}{3}$, $f(3) = \dfrac{2 \cdot 2011}{4 \cdot 3}$, $f(4) = \dfrac{2 \cdot 2011}{5 \cdot 4}$ i així successivament $f(n) = \dfrac{2 \cdot 2011}{n(n+1)}$, cosa que podem provar per inducció.

Suposat que és cert per a $n-1$, és a dir $f(n-1) = \dfrac{2 \cdot 2011}{(n-1)n}$ aleshores per la recurrència tenim que $f(n) = \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{2 \cdot 2011}{(n-1)n}$ i, si simplifiquem, obtenim efectivament $f(n) = \dfrac{2 \cdot 2011}{n(n+1)}$.

Per tant $f(2011) = \dfrac{2 \cdot 2011}{2011 \cdot 2012} = \dfrac{2}{2012}$.

---

30. B. 1.

Com que a i b són nombres enters, la suma $a^2 + b^2$ pot prendre com a valors, a priori, els nombres enters positius i el 0.

Vegem que no pot prendre el valor 0. En efecte, si fos $a^2 + b^2 = 0$ hauria de ser $a = x + y + z = 0$ i $b = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{xy + xz + yz}{xyz} = 0 \Rightarrow xy + xz + yz = 0$.

Com que $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$ es deduïria que $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$, cosa que contradiu l'enunciat.

Vegem ara que sí que pot ser $a^2 + b^2 = 1$. Haurà de ser un dels dos sumands igual a 1 i l'altre a 0; no és cap restricció suposar $a = 0, b = 1$. Comprovarem que es pot aconseguir amb $x = y$. Haurà de ser $2x + z = 0$ i $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Si es resol el sistema podem comprovar que $x = \dfrac{3}{2}, y = \dfrac{3}{2}, z = -3$ donen solució al problema plantejat.

Marató de problemes 2011

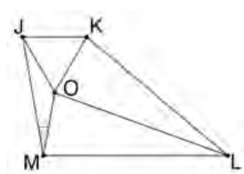
Activitat telemàtica per a alumnes d'ESO
Febrer-Abril 2011. Enunciats

0. (Problema de 2 punts.)
En un *minisudoku* cal omplir una taula de 4 x 4 de manera que en cada fila, en cada columna i en cada un dels quatre quadrats de 2 x 2 remarcats a la figura hi han d'aparèixer un 0, un 1, un 2 i un 3. De quantes maneres diferents es pot emplenar el *minisudoku* de la figura?

1. (Problema de 2 punts.)
Et proposem quatre casos del **joc del 24**. Es tracta d'aconseguir un resultat de 24 fent servir els quatre nombres que se't donen i operacions elementals: suma, resta, multiplicació, divisió, amb el benentès que es tracta d'operacions amb nombres racionals, no cal que tots els resultats d'operacions parcials siguin enters.
Un exemple: Amb 2, 2, 3, 9 podem fer 2*3+2*9 però també 9*(2+2/3) ...i potser trobaràs altres possibilitats. Aquests són "els teus" quatre casos del **joc del 24** triats a l'atzar entre els que tenen solució:

- 9, 2, 5, 1
- 1, 3, 4, 8
- 4, 8, 5, 7
- 5, 4, 7, 1

2. (Problema de 3 punts.)
En la figura de la dreta, els segments JK i ML estan situats sobre rectes paral·leles i, doncs, el quadrilàter $JKLM$ és un trapezi. Els quatre segments JK, KO, OJ i OM són iguals. Els tres segments de color blau LK, LO i LM també són iguals. Quina és la mesura, en graus sexagesimals, de l'angle marcat a la figura (és a dir $\widehat{OMJ}$)?



3. (Problema de 2 punts.)

La figura següent mostra els tres primers passos en la construcció del triangle de Sierpinski.

• El triangle inicial és equilàter.

• En el pas 1 construïm el triangle que s'obté unint-ne els punts mitjans dels costats i pintant-lo de color blanc.

• En cada pas successiu fem el mateix amb cada un dels triangles que encara eren de color blau. Adoneu-vos que sempre pintem blanc un triangle que té "la punxa cap avall".

Si fem el pas 4 de la construcció, quina fracció de l'àrea del triangle inicial l'haurem pintada de color blanc?

---

4. (Problema de 3 punts.)

Un diari de molta tirada està desenvolupant una promoció que consta d'un conjunt de braçalet (on hi van cinc pedres), arracades, anell i penjoll. Les pedres que componen la col·lecció són 44, totes diferents, i dues més iguales entre elles i a una de les anteriors, que formen part de la col·lecció. Totes les peces són intercanviables i poden anar en qualsevol dels llocs, ja sigui en les cinc posicions del braçalet -que són diferents per laposició dle braçalet al canell-, del penjoll, de les arracades o de l'anell. Ara bé, a la Júlia li agrada portar sempre les cinc pedres del braçalet totes diferents entre elles, però en canvi les dues pedres de les arracades vol que siguin iguals entre elles, i també vol que siguin iguals entre elles la del penjoll i la de l'anell i per això va aconseguir n peces intercanviables més (iguals a n pedres de la col·lecció però no iguals a la que ja estava repetida) per poder fer parelles de pedres iguales.

La propaganda de la promoció diu (ho traduïm textualment):

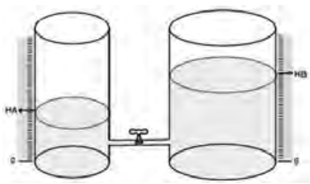
Un elegant conjunt que podràs personalitzar amb una col·lecció de pedres de diferents colors i materials. Amb un únic conjunt podràs fer **infinites** *combinacions!*

Si creus que realment són *infinites* combinacions ja no cal que calculis res; has de contestar directament al formulari de resposta "infinites"; altrament et demanem que calculis quantes presentacions diferents podrà aconseguir la Júlia amb el seu conjunt de joies i pedres i els seus gustos per a dissenyar les joies.

---

5. (Problema de 4 punts.)

La imatge esquematitza un conjunt de dos dipòsits cilíndrics, posats verticalment i connectats per una aixeta de pas. El radi del cilindre de la dreta és k vegades el radi del cilindre de l'esquerra.



Els regles que mesuren el nivell de l'aigua, que són iguals i amb el 0 al mateix nivell, marquen HA el de l'esquerra, i HB el de la dreta. Si obrim l'aixeta de pas, quines seran les lectures del nivell de l'aigua en els dos regles quan acabi el flux d'aigua d'un dipòsit cap a l'altre?

---

6. (Problema de 3 punts.)

Es proposaven enunciats que eren variacions numèriques del següent.

Dos equips han de córrer una cursa de K quilòmetres per relleus.

L'equip **A** té tres components que corren a ritmes constants de a km/h, b km/h i c km/h. Es reparteixen el recorregut de manera que **les distàncies** respectives que recorren estan en la proporció $m : n : p$.

L'equip **B** té tres components que també corren justament als mateixos ritmes constants de a km/h, b km/h i c km/h. Es reparteixen la cursa de manera que, en aquest cas, **els temps** respectius que corre cada component estan en la proporció $m : n : p$.

Quin equip guanyarà la curs ai amb quina diferència de temps?

---

7. (Problema de 3 punts.)

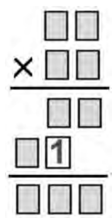
En un cercle inscrivim un triangle equilàter. En aquest triangle inscrivim un cercle. En aquest cercle inscrivim un altre triangle equilàter, que resulta que té una àrea de A m^2. Quina és l'àrea del primer triangle?

---

8. (Problema de 2 punts.)

L'únic 1.

La imatge representa una multiplicació feta tal com s'explica l'algorisme de la multiplicació a Catalunya. Si la xifra 1 que veieu és l'únic 1 que apareix en tota la multiplicació, quin és el resultat de la multiplicació?



---

9. (Problema de 3 punts.)
En un moment de la temporada, la Marina, jugadora de bàsquet, havia encistellat el $A\%$ dels tirs lliures que havia llançat. Des d'aquell moment fins a final de temporada encara va llançar N tirs lliures més, dels quals en va encistellar P i, d'aquesta manera, el seu percentatge global d'encert va augmentar fins el $P\%$. Quin és el nombre total de tirs lliures que va llançar la Marina al llarg de tota la temporada?

---

10. (Problema de 2 punts.)
Una persona camina per la vorera dels nombres imparells d'un carrer molt llarg, numerat com és habitual amb els nombres parells a un costat del carrer i els nombres imparells a l'altre. Si va caminant des del nombre 1 fins al 2011, sempre per la vorera dels imparells, per davant de quantes xifres 9 de les plaques dels números d'aquesta vorera haurà passat?

---

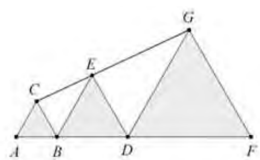
11. (Problema de 3 punts.)
El nombre Φ, anomenat el nombre d'or, compleix $\Phi^2 = \Phi + 1$. Comproveu que Φ^5 es pot escriure com $\Phi^5 = a \cdot \Phi + b$ per dos nombres enters a i b. Haureu d'enviar els valors d'aquests dos nombres a i b.

---

12. (Problema de 4 punts.)
Quins són els nombres enters n amb la propietat que $n2011$ és un quadrat perfecte i que $n + 2012$ també és un quadrat perfecte?

---

13. (Problema de 7 punts.)
A la imatge teniu tres triangles equilàters, ABC, BDE i DFG. Els punts A, B, D, F estan alineats; els punts C, E, G, també. Si l'àrea del triangle ABC és r i la del triangle BDE és s, quina és l'àrea del triangle DFG?



---

14. (Problema de 7 punts.)
En l'arranjament de nombres de la figura podeu veure que el quart nombre de la quarta fila és 32 i que el tercer nombre de la cinquena fila és 40.

1 2
1 4 4
1 6 12 8
1 8 24 32 16
1 10 40 80 80 32

a) Quin és el tercer nombre de la desena fila?
b) Quin és el nombre que queda a la dreta de la n-sima fila?
c) Quin és el r-sim nombre de la n-sima fila?

Marató de problemes 2011

Els resultats

Aquesta activitat es va desenvolupar des del dia 9 de febrer de 2011 fins el dia 1 de maig de 2011. Es van inscriure 233 participants, que van enviar amb el formulari d'inscripció la solució dle primer problema i després, més dels quals més de 50 van enviar les respostes a 6 problemes dels 12 que es van proposar en la primera part del concurs i una vintena van trametre l'explicació raonada de la solució dels dos últims problemes. La puntuació màxima era de 50 punts.

Els **premis** corresponen a

Marina Borja Lloret, 4t d'ESO, IES Bellaguarda, d'Altea (Marina Baixa) i
Joan Marco Rimmek, 4t d'ESO, Institut d'Alella (El Maresme),
ex-aequo, 49,3 punts
i Pau Ventura Alsina, 4t d'ESO, Institut Pius Font i Quer, Manresa (Bages),
48,9 punts

Es fa una **menció especial** de

Daniel Valcárcel Muñoz de León, 3r d'ESO, Institut de Badia del Vallès
i Àlex Padilla Balboa, 2n d'ESO, Escola Joan Pelegrí, Barcelona.

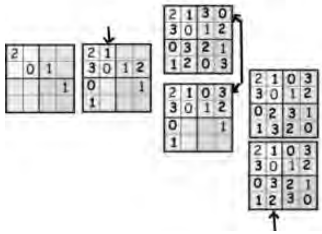
Relació d'alumnes que van superar la **puntuació de 32 punts**:

Elisabet Villalobos Guiral, 4t d'ESO, Aula Escola Europea, Barcelona,
Jordi Fortuny Profitós, 3r d'ESO,
Col·legi Ntra. Sra del Carme, de Balaguer (La Noguera)
Pau Mir García, 3r d'ESO, Institut de Sant Quirze del Vallès
Júlia Arrizabalaga Espona, 3r d'ESO,
Institut Arquitecte Manuel Raspall de Cardedeu (Vallès Oriental)
Gerard Valls Ferrer, 3r d'ESO, d'Aula Escola Europea, Barcelona,
Oriol Sabaté Borràs 4t d'ESO, CEPA Oriol Martorell, Barcelona
Sam Davies Udina, 4t d'ESO, CEPA Oriol Martorell, Barcelona
i Marta Arasanz, 3r d'ESO, 4t d'ESO, Institut Sant Andreu, Barcelona.

Marató de problemes 2011

Solucions

0. Resposta: 3.

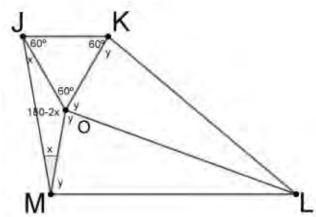


1. Solucions de l'enunciat proposat.

$9 \times 2 + 5 + 1 = 24, (4 + 8) \times (3 - 1) = 24, 4 + 5 + 7 + 8 = 24, 4 \times 7 + 1 - 5 = 24.$
Alguns **altres exemples**:
Amb 5, 5, 5, 1: $5 \times (5 - 1/5) = 24$; amb 3, 3, 8, 8: $8/(3 - 8/3) = 24$
Amb 6, 5, 4, 1, dues maneres: $6/(5/4 - 1) = 4/(1 - 5/6) = 24$.

2. Resposta: 20°.

A la figura hem indicat els angles de 60° del triangle equilàter OJK. En el triangle isòsceles OJM hem indicat com x l'angle que busquem i a partir d'aquest hem escrit els valors dels altres. Com que els dos triangles isòsceles LOK i LMO són iguals, ho seran els quatre angles indicats amb y.



Els quatre angles en el punt O han de sumar 360°, és a dir que $180° - 2x + 2y + 60° = 360°$. Com que JK i ML són paral·leles, tallades per la secant JM, els angles MJK i LMJ són alterns interns i, per tant suplementaris, és a dir que $60° + x + x + y = 180°$. Es dedueix que $x = 20°$.

3. Resposta: 175/256.

Comptem la part que roman de color blau. En cada pas, una quarta part de l'àrea que quedava blava esdevé blanca i, per tant, 3/4 parts de l'àrea segueixen de color blau. Així tindrem que, en el quart pas, romandrà blava una fracció de $(3/4)^4 = 81/256$ de l'àrea inicial i, doncs, la fracció blanca serà $181/256 = 175/256$.

4. Per a n =5, 6, 8 o 10,
respostes: 319672088, 4448545920, 7564677120, 11497449600.

Comptarem les possibilitats que té de fer presentacions diferents. Indicarem amb R les pedres que té repetides 3 vegades; en té unes altres n repetides dues vegades.

A) Si posa a les arracades dues pedres R,per al penjoll i l'anell tindrà n possibilitats. En cada cas quedaran 43 pedres diferents per al primer lloc del braçalet, que s'enllacen amb 42 possibles tries de la segona pedrs; 41 per a la tercera pedra, 40 per a la quarta, 39 per a la cinquena. Això dóna $n \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39$ presentacions diferents.

B) Si suposem que posa al penjoll i l'anell dues pedres R, tot el raonament se seguirà igual que en el cas **A**) començant per les dues pedres de les arracades, la primera pedra del braçalet, etc. Tenim, doncs, unes altres $n \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39$ presentacions diferents.

C) Si suposem que no fa servir les pedres R per a les arracades ni per a l'anell ni per al penjoll, els nombres de possibles eleccions, serà: n per a les arracades, $n-1$ per al penjoll/anell, 42 per a la primera pedra del braçalet, i 41, 40, 39, 38 possibilitats, respectivament, per a les altres. D'aquesta manera, doncs, surten $n \cdot (n-1) \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38$ presentacions diferents.
Per obtenir el nombre total de casos cal sumar els tres anteriors.

5. Solució.

Quan s'obre l'aixeta i es posen en comunicació els dos dipòsits cilíndrics, en el moment de l'equilibri l'altura de l'aigua en els dos dipòsits haurà passat a ser la mateixa.

Plantejarem l'equació corresponent a nivells d'agua inicials $HA < HB$, i per tant passa aigua del dipòsit més ample (de radi kr) al dipòsit més estret (de radi r). Indicarem amb H el nivell final, igual per a tots dos dipòsits. Com que és clar que el volum d'aigua guanyat pel dipòsit de l'esquerra ha de ser igual al volum d'aigua perdut per l'altre, això ens permet escriure:

$$\pi(HB - H) \cdot (kr)^2 = \pi(H - HA) \cdot r^2)$$

Simplificant obtenim $(HB - H) \cdot k^2 = H - HA$.

Resolem l'equació en H i trobem $H = \dfrac{HA + k^2 HB}{1 + k^2}$.

6. Resposta: sempre guanya l'equip B.

• Equip A: Les distàncies recorregudes seran mD, nD, pD i per tant $mD + nD + pD = K \Rightarrow D = \dfrac{K}{m+n+p}$. Els temps emprats per cada corredor seran $\dfrac{mD}{a}$, $\dfrac{nD}{b}$ i $\dfrac{pD}{c}$ i, per tant, el temps total

$$\frac{mD}{a} + \frac{nD}{b} + \frac{pD}{c} = \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}\right) \cdot \frac{K}{m+n+p}$$

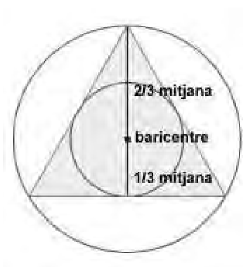
• Equip B: Els temps emprats per cada component de l'equip seran mt, nt, pt i per tant el temps total $T = (m+n+p)t$. Les distàncies recorregudes seran amt, bnt, cpt i com que el total han de ser els K quilòmetres de la cursa,

$$amt + bnt + cpt = K \Rightarrow t = \frac{K}{am+bn+cp}$$

i el temps total serà de $\dfrac{K(m+n+p)}{am+bn+cp}$.

Es pot demostrar (tot i que no es demnava en el problema, que es va plantejar amb valors numèrics concrets), que siguin els que siguin els valors de a, b, c i de m, n, p, si les velocitats delss tres components de l'quip no són iguals, sempre guanya l'equip que es reparteix la cursa per temps si ho fa guardant la mateixa proporció per al repartiment que el que ho fa per velocitats.

7. Resposta: L'àrea del primer triangle és el quàdruple de la del segon.

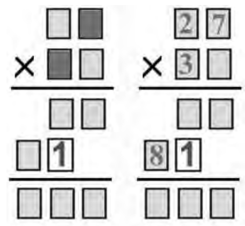


Els dos cercles que dibuixem són el cercle circumscrit i el cercle inscrit al primer triangle equilàter que, és clar, tenen el mateix centre, que és el centre del triangle equilàter (baricentre, circumcente, incentre, ortocentre, punt de Fermat,...).

Com que el baricentre divideix la mitjana per la tercera part es veu que el radi del cercle circumscrit a un triangle equilàter és el doble del radi del cercle inscrit.

Així doncs els dos triangles que considerem son triangles equilàters inscrits en dos cercles que el radi d'un és el doble del radi de l'altre. El costat d'un triangle també serà el doble del de l'altre i, per tant, l'àrea del gran serà el quàdruple de l'àrea del petit.

8. Resposta: 864.



Hem d'estudiar quines xifres poden anar als requadres acolorits fosc. Com que no hi pot anar cap altre 1 en principi podríem pensar (indicant primer el del primer factor, després el del segon factor) $3 \times 7, 7 \times 3$ o 9×9. Però com que el primer factor és un nombre més gran que 20 i el resultat de multiplicar-lo per la segona d'aquestes xifres que busquem ha de ser més petit que 100, resulta que haurà de ser 7×3 i perquè el 3 multiplicat per 7 no passi de 100, haurà de ser 27.

Finalment, com que el resultat de la multiplicació de la segona xifra del segon factor pel primer factor (primera fila de la multiplicació) no pot arribar a 100, ni pot tenir cap 1, deduïm de seguida quina és la xifra que ens falta en el segon factor i veiem que el resultat de la multiplicació és 864.

9. Solució general.

(Es proposaven variants numèriques de l'enunciat).

Si indiquem amb x el nombre de tirs lliures que havia llançat la Marina en el moment de les dades inicials del problema, tenim que fins aleshores n'havia encistellat $x \cdot \dfrac{A}{100}$. Al final de la temporada les dades de la Marina seran

$$\frac{encerts}{total\,tirs} = \frac{\frac{A}{100} + P}{x + N} = \frac{B}{100}.$$

Per obtenir la solució del problema (que tal com es fa la pregunta és $x + N$) n'hi ha prou amb resoldre l'equació anterior en x.

10. Resposta: 401.

L'enunciat el podem traduir així: si escrivim tots els nombres imparells des de l'1 fins al 2011, quants 9 hem fet servir?

De 9 a 99 hi ha 15 nous (9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 91, 93, 95, 97, 99). El mateix de 109 a 199. I de 209 a 299,..., i de 809 a 899. En canvi de 909 a 999 hi ha els 15 d'abans més 50 (ja que de 901 a 999 hi ha 50 nombres imparells, i per tant, 50 nous al davant). Així, de moment portem $15 \times 10 + 50 = 200$ nous. Però de 1009 a 1999 torna a haver-hi 200 nous més. I hi ha un altre 9 pel 2009. Així, en total tenim $200 \times 2 + 1 = 401$ nous.

11. Resposta: $\Phi^5 = 5\Phi + 3$.

A partir de la propietat del nombre d'or, $\Phi^2 = \Phi + 1$ podem operar així:

$$\begin{aligned}\Phi^5 = \Phi^2 \cdot \Phi^2 \cdot \Phi &= (\Phi+1)\cdot(\Phi+1)\cdot\Phi = \\ &= (\Phi^2 + 2\Phi + 1)\cdot\Phi = \\ &= (\Phi + 1 + 2\Phi + 1)\cdot\Phi = (3\Phi+2)\cdot\Phi = \\ &= 3\Phi^2 + 2\Phi = 3\Phi + 3 + 2\Phi = 5\Phi + 3.\end{aligned}$$

En general si S és la successió de Fibonacci $S = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...\}$, per a valors de $n > 1$ es compleix que $\Phi^n = S_n\Phi + S_{n-1}$.

---

12. Resposta: 5732, 49972, 449572, 4046132.

Busquem un nombre enter n amb la propietat que $n - 2011 = p^2$ i que $n + 2012 = q^2$(eq. 1) per a dos nombres enters, p, q. És clar que el nombre n que busquem ha de ser positiu perquè, altrament, $n - 2011$ no pot ser mai un quadrat perfecte.

Si restem les dues equacions (eq. 1) obtenim $q^2 - p^2 = 4023$. Això és $(q+p)\cdot(q-p) = 4023$. (eq. 2)

Com que $4023 = 3^3 \cdot 149$, els divisors de 4023 són $\{1, 3, 9, 27, 149, 447, 1341, 4023\}$ i, per (eq. 2), aquests divisors, agrupats adequadament per parelles, ens han de donar $q - p$ i $q + p$.

- Si posem $q-p = 1$ i $q+p = 4023$ resulta $p = 2011$, $q = 2012$, $n = 4046132$
- Si posem $q - p = 3$ i $q + p = 1341$ resulta $p = 669$, $q = 672$, $n = 449572$
- Si posem $q - p = 9$ i $q + p = 447$ resulta $p = 219$, $q = 228$, $n = 49972$
- Si posem $q - p = 27$ i $q + p = 149$ resulta $p = 61$, $q = 88$, $n = 5732$

i així tenim els quatre nombres que són solució del problema plantejat

---

Dels dos problemes següents es demanava l'explicació detallada. Tot seguit es presenta una redacció que resumeix les millors respostes rebudes.

---

13. Resposta: $\dfrac{s^2}{r}$.

És clar que els tres triangles equilàters són semblants i que la construcció fa que els costats d'un siguin paral·lels als de l'altre. Per aquesta raó també són semblants els triangles CBE i EDG i, per tant, $\dfrac{CB}{ED} = \dfrac{BE}{DG}$. Però $\dfrac{CB}{ED}$ és la raó de semblança de ABC a BDE i $\dfrac{BE}{DG}$ és la raó de semblança de BED a DGF.

És a dir que, per la construcció, la raó de semblança del primer triangle equilàter al segon és la mateixa que la del segon al tercer. Com que la raó d'àrees és el quadrat de la raó de semblança, també la raó d'àrees del primer triangle al segon i del segon triangle al tercer serà la mateixa. Si A és l'àrea que busquem $\frac{r}{s} = \frac{s}{A}$ i resulta la resposta indicada.

---

14. Solució.

Quin és el tercer nombre de la desena fila?
Es pot veure que en la fila n per passar de l'1 inicial al segon nombre es multiplica per $2n$ i per passar del segon al tercer per $n-1$. Per $n = 10$ el tercer nombre serà $2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$
Quin és l'últim nombre de la fila n? n^2
Quin és el r-sim nombre de la n-sima fila?
Si continuem el raonament que dèiem al principi es veu que en la fila n el segon nombre és $2n$; per passar al tercer multipliquem per $\frac{2(n-1)}{2}$; per passar als següents per $\frac{2(n-2)}{3}$, $\frac{2(n-3)}{4}$ i així successivament trobem la fórmula que ens permet generar la "piràmide":

$$S_{n,r} = 2^{r-1} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...}{(r-1)!}$$

on al numerador hi ha $r-1$ nombres.
Una altra línia de raonament pot resultar de descompondre els nombres que apareixen a la nostra priàmide en factors primers; podem veure que tots són el resultat d'una potència de base 2 (d'exponents creixents en cada fila, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3,...)i un altre nombre, justament el que està en la mateixa posició al Triangle de Tartaglia, començat posant 1 1 en la primera fila. Com que, així el nombre r-sim de la fila n-sima del triangle de Tartaglia és $\binom{n}{r-1}$, si $S_{n,r}$ representa el r-sim nombre de la n-sima fila de l'enunciat, serà $S_{n,r} = 2^{r-1} \cdot \binom{n}{r-1}$.

Els dos camins de raonament es justifiquen en el fet que una manera recurrent de construir la piràmide donada, escrita simbòlicament, és la següent:

$$S_{n,r} = 2S_{n-1,r-1} + S_{n-1,r}.$$

Per acabar, una observació interessant: si els nombres de la fila n del triangle de Tartaglia són els coeficients de $(x+1)^n$, els de la piràmide de nombres d'aquest problema són els coeficients de $(x+2)^n$.

Una publicació de la Societat Catalana de Matemàtiques

Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Barcelona. Maig 2011

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES · I · E · C ·